



ANÁLISIS BASADO EN WAVELETS DEL MERCADO ACCIONARIO MEXICANO

Jesús Cuauhtémoc Téllez Gaytán*
Teresa de Jesús Vargas Vega**
José Antonio Hernández González***

MÉJICO

Resumen

Este documento analiza el comportamiento del mercado accionario mexicano en diferentes escalas de tiempo utilizando el enfoque de wavelets, con el propósito de obtener información más a detalle de lo que la serie en su forma global no puede brindar. Lo anterior se logra descomponiendo la serie de los rendimientos del principal índice accionario de México (IPC) en diferentes niveles de resolución, aplicando la Transformada wavelet discreta de máximo traslape (TWDMT) y como filtro la función de Daubechies de mínima asimetría MA (8). Los resultados muestran evidencia del fenómeno asimétrico identificado como *Gaussianidad-agregativa*, en donde la distribución de los rendimientos no es la misma en diferentes escalas de tiempo. Así mismo, la varianza wavelet mostró ser mayor para escalas con menor duración de tiempo cuyas implicaciones, en el marco de Valor en Riesgo, serían pérdidas potenciales mayores en horizontes de inversión de corto tiempo.



* Licenciado en Economía. Magister en Finanzas. Doctor en Ciencias Financieras. Profesor- Investigador de la Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas de la Universidad Autónoma del Carmen (Campeche, México). Algunas de sus publicaciones son: Estimating Market Risk under a Wavelet-Based Approach: Mexican Case y La Estimación del Valor en Riesgo usando Valores Extremos y Cópulas. Perteneció al Grupo de Investigación de Economía. jctellezg@gmail.com - jctellezg@hotmail.com

** Contadora Pública. Candidata a Doctor en Economía, Magister en Finanzas (UNAM). Profesora – Investigadora del Instituto de Ciencias Económico Administrativas de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Perteneció al grupo de Investigación de Contaduría. Se destaca su publicación Estimating Market Risk under a Wavelet-Based Approach: Mexican Case. tvargasv@hotmail.com

*** Contador Público, Magister en Finanzas. Profesor Investigador del Instituto de Ciencias Económico Administrativas de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. Perteneció al grupo de investigación de Contaduría. Se destaca su publicación: Estimating Market Risk under a Wavelet-Based Approach: Mexican Case. janthdz@hotmail.com



Palabras clave: wavelets, análisis por multiresolución, varianza, Gaussianidad-agregativa, mercados accionarios.

Abstract

This paper analyzes the main Mexican equity index (IPC) behavior at different time scales under a wavelet-based approach, which aims to obtain detailed information about it rather than a global approach. The former is performed by decomposing the IPC returns at different resolution levels using the maximal overlap discrete wavelet transform (MODWT) and the least asymmetric LA (8) Daubechies wavelet as the filtering function. Results show evidence of *aggregative-Gaussianity*, a type of asymmetric phenomenon in which returns distribution varies at different time scales. Also, the wavelet variance showed a greater value at scales with short-time spans than longer ones, which may result under the Value-at-Risk (VaR) framework in greater potential losses at short-time investment horizons.

Keywords: wavelets, multiresolution analysis, variance, aggregative-Gaussianity, stock markets. 1. Introducción

Introducción

La conjunción de los avances en disciplinas como la Estadística, Matemáticas y Computación, ha tenido sus resultados en las finanzas en general y en la administración de riesgos en particular. Por un lado, su aplicación ha sido para validar los hechos estilizados que han caracterizado el comportamiento de los precios de activos financieros, entre ellos, grandes cambios en los precios y memoria de largo plazo. Por otro lado, al poder capturar y modelar dichos hechos estilizados, se ha logrado mejorar las metodologías de estimación del riesgo al que los respectivos activos están expuestos, siendo uno de los más significativos el riesgo de mercado.

Recientemente, una de las aplicaciones matemáticas que ha ganado terreno en Finanzas y Economía, por su flexibilidad en analizar simultáneamente las series de tiempo en el dominio de frecuencia y tiempo, ha sido la teoría de wavelets, teoría cuya principal base es el análisis de Fourier, el cual únicamente analiza la señal en el dominio de las frecuencias. Wavelets son funciones que oscilan (wave) y decaen (let) a cierto número de desvanecimientos, las cuales se consideran como filtros idóneos para descomponer una señal en diferentes niveles de resolución, método conocido como descomposición por multiresolución. El beneficio principal que ha tenido en diversas disciplinas como la geofísica, medicina y estadística, es su capacidad para analizar fenómenos no estacionarios, temporales y de variación en el tiempo.



Las primeras aplicaciones de wavelets en finanzas y economía se realizan por Ramsey y Lampart (1999) quienes analizan las relaciones entre variables macroeconómicas tales como ingreso, consumo, tasa de interés, agregados monetarios. En estudios posteriores, Gencay, Selcuk y Whitcher (2002) analizan los rendimientos y volatilidad del mercado accionario estadounidense y de activos de capital individuales, así como la demanda por dinero en México. Lee (2004) analiza el comportamiento entre los mercados accionarios de Estados Unidos y Corea; Fernández (2005) estima la beta de CAPM para países emergentes a través de la descomposición por multiresolución de los rendimientos accionarios y en cada nivel estima la varianza wavelet y el Valor en Riesgo (*VaR*). Norsworthy, et al. (2000) y Xiong, et al. (2005), igualmente estiman la beta de CAPM para emisoras del S&P 500 y de la Bolsa de Valores de Shangai, respectivamente. Lai, He y Chen (2006) estiman el riesgo de mercado de metales no-ferreos basado en un enfoque híbrido donde combinan wavelets y el modelo ARMA-GARCH; Téllez, Vargas y Hernández (2009) estiman el VaR y pérdida esperada en la cola del IPC utilizando principalmente la transformada wavelet discreta (TWD).

Este documento tiene por objetivo analizar el principal índice accionario de México – IPC – basado en la descomposición por multiresolución a través de wavelets, utilizando como filtro la función wavelet desarrollada por Daubechies en 1988, de mínima asimetría y longitud ocho MA (8). En cada nivel de resolución asociado a una escala de tiempo, se estiman los estadísticos descriptivos y la varianza wavelet con el propósito particular de identificar la presencia del fenómeno asimétrico conocido como Gaussianidad-agregativa. La aplicación de wavelets en finanzas tiene su importancia en poder analizar en detalle una serie de tiempo financiera e identificar particularidades respecto de lo que el análisis de una serie de tiempo en una forma global no podría realizar.

El documento se divide de la siguiente forma: la segunda sección trata sobre la teoría de wavelets con énfasis en la metodología de la descomposición por multi-resolución. La tercera sección describe los datos y los resultados del análisis por wavelets. Finalmente la cuarta sección presenta las conclusiones.

Análisis por Wavelets

Wavelets son funciones de estructura especial descritas por funciones base que se representan a través de aproximaciones sucesivas de series, similares a las series de Fourier, las cuales se representan por funciones seno y coseno. Las funciones wavelets (ondas cortas) tienen la propiedad de concentrar su energía en el tiempo para brindar un análisis de los fenómenos de temporalidad, no estacionariedad y variación en el tiempo (Burrus, Gopinath y Guo, 1998: 1). La estructura especial de wavelets radica en que conservan su



característica oscilatoria y la habilidad para permitir simultáneamente el análisis de tiempo y frecuencia, por lo que es posible procesar los datos en diferentes escalas y resoluciones, a diferencia del análisis de Fourier donde la señal (serie de tiempo) procesada indica únicamente la cantidad de frecuencias y de energía que en cada frecuencia existe en la señal original, pero no brinda información en dónde una frecuencia en particular aparece en el dominio del tiempo. Al respecto, el análisis por wavelets es como mirar el bosque (ventana grande) para detectar las grandes particularidades y a la vez mirar los árboles (pequeñas ventanas) para detectar las pequeñas particularidades (Graps, 1995:50).

Antecedentes

Las funciones wavelets poseen dos propiedades que hacen conceptual y matemáticamente su construcción: *admisibilidad* y *regularidad* (Valens, 2004: 6-7). La propiedad de *admisibilidad* hace referencia al término de *wave*, la cual consiste en que la Transformada de Fourier de una función decaiga en la frecuencia cero; esto es, el valor promedio de una wavelet en el dominio del tiempo debe ser cero por lo que la función es oscilatoria y en consecuencia representa una onda (*wave*). La condición de *regularidad* hace referencia al término *let* o *decaimiento rápido*, e implica que la función wavelet debe poseer suavización y concentración en el dominio del tiempo y frecuencia, por lo que la función wavelet tendrá N momentos de desvanecimiento u órdenes de aproximación. Por lo tanto, una *wavelet* es una función que oscila y decae a cierto número de desvanecimientos o aproximaciones.

La construcción de wavelets se basa en la dilatación ($W(x) \rightarrow W(2x)$) y translación ($W(2x) \rightarrow W(2x - 1)$) de una función; si la dilatación y translación se hace en forma infinita, se tendría la familia de funciones base $W_{jk}(x) = W(2^j x - k)$ en $L^2[0,1]$ que junto con una función de escala $\phi(x)$ representaría la construcción de una wavelet, donde $j \geq 0$ y $0 \leq k < 2^j$. Además, el producto interno de $\phi(x)W(x)dx$ es cero, teniendo como resultado la propiedad de *ortogonalidad mutua* entre las dilataciones y translaciones de W . Lo anterior hace la importancia de wavelets para analizar series de tiempo en diferentes escalas y frecuencias a través del tiempo, esto es, la descomposición de la serie para analizar a detalle sus características y su reconstrucción (síntesis) para obtener la señal original.

Una de las principales bases en wavelets es el análisis de frecuencias desarrolladas por Fourier, el cual establece que una señal periódica $f(x)$ con periodo fundamental L puede expresarse como la suma de términos seno y coseno de la forma



$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} \left[a_r \cos \frac{2\pi r x}{L} + b_r \sin \frac{2\pi r x}{L} \right], \quad x \quad (1)$$

donde a_0 , a_r y b_r son número reales y $2/L$ es la frecuencia fundamental o angular comúnmente representada por f ; y, los coeficientes a_r y b_r se definen de la forma

$$a_r = \frac{2}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} f(x) \cos\left(\frac{2\pi r x}{L}\right) dx, \quad r = 1, 2, \dots \quad (2)$$

$$b_r = \frac{2}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} f(x) \sin\left(\frac{2\pi r x}{L}\right) dx. \quad r = 1, 2, \dots \quad (3)$$

El caso particular identificado por Fourier fue $L = 2\pi$.

Las series de Fourier son una representación particular de funciones las cuales están definidas en un intervalo finito y en un solo periodo, por lo que el caso general es considerado a través de la Transformada de Fourier que puede representar una función en términos de la superposición de términos sinusoidales sobre un intervalo infinito y sin alguna periodicidad en particular. La función principal de la Transformada de Fourier es medir el contenido de frecuencia de una señal, información que no es fácil de detectar en el dominio de tiempo de la señal original, y comúnmente las señales presentan más de un componente de frecuencia.

Para determinar la Transformada de Fourier de una función, primeramente es necesario representar una serie de Fourier en forma simplificada utilizando la expansión exponencial compleja y la ecuación de Euler,

$$f(x) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_r \exp\left(\frac{2\pi i r x}{L}\right), \quad (4)$$

donde los coeficientes de la serie compleja de Fourier se definen como

$$c_r = \frac{1}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} f(x) \exp\left(-\frac{2\pi i r x}{L}\right) dx. \quad (5)$$

¹ $f = 2/L = 2/\pi$ donde f es la frecuencia de la señal y mide el número de ciclos por unidad de tiempo, i.e., una corriente eléctrica de 60 Hz indica que la onda seno pasa 60 veces por el mismo punto.



Si la serie compleja de Fourier representa funciones que varían en el tiempo, entonces

$$f(t) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_r e^{i\omega_r t}, \quad (6)$$

y los coeficientes de la serie se expresan de la forma

$$c_r = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega_r t} dt, \quad (7)$$

donde $\omega_r = 2\pi r/T$ y debe satisfacerse que $\int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$ sea finita. Sustituyendo (7) en (6) se tiene:

$$f(t) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega_r t} dt \right] e^{i\omega_r t}, \quad (8)$$

y en la medida que T tienda a infinito, el cambio en la frecuencia se va desvaneciendo y el espectro de las frecuencias ω_r se convierte en una variable continua. Entonces,

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta\omega}{2\pi} \left[\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega_r t} dt \right] e^{i\omega_r t} \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta\omega}{2\pi} \hat{f}_T(\omega_r) e^{i\omega_r t} \Delta\omega, \end{aligned} \quad (9)$$

y cuando $T \rightarrow \infty$, $\Delta\omega \rightarrow 0$ entonces ω_r se convierte en una variable continua, por lo tanto

$$\hat{f}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \hat{f}_T(\omega_r) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt, \quad (10)$$

es la Transformada de Fourier de $f(t)$, donde

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (11)$$

es la integral de Fourier.

Como conclusión, la Transformada de Fourier es el proceso de transformar la función $f(t)$ en el dominio del tiempo en la misma función $\hat{f}(\omega)$ pero en el



dominio de frecuencia y se expresa como $\{f(t)\}$; y al proceso inverso de regresar $f(t)$ a partir de $\hat{f}(\)$ se conoce como la Transformada Inversa de Fourier, $\{f(t)\}$.² Un aspecto importante al observar detenidamente la Transformada de Fourier (10), es que la integración de $f(t)$ se realiza en todo el intervalo de tiempo sin importar en dónde el componente de la frecuencia aparece en el tiempo (T_1, T_2, \dots) , ya que el efecto de la frecuencia será el mismo en la integración. La Transformada de Fourier indica la existencia o no del componente de frecuencia independientemente del momento del tiempo en que pueda aparecer, por lo cual su aplicación toma sentido en señales (series de tiempo) que son estacionarias. En resumen, la Transformada de Fourier proporciona los componentes de frecuencia (componentes espectrales) existentes en una señal.³

El segundo antecedente consistió en expresar una función $x(t)$ a través de funciones base con cambio de escala, esto es, migración del análisis de frecuencia al análisis de escala (Graps, 1995:52):

- **Funciones base:** Un vector de dos dimensiones (x,y) es el resultado de la combinación de los vectores $(1,0)$ y $(0,1)$ llamados vectores base, ya que al multiplicar x por $(1,0)$ resulta en el vector $(x,0)$, y por el vector $(0,1)$ resulta en el vector $(0,y)$. Por lo tanto, la suma de ambos vectores, $(x,0)$ y $(0,y)$, resulta en el vector (x,y) . Donde la propiedad valorable en los vectores base es que son perpendiculares u ortogonales uno al otro. En términos de una función $f(x)$, ésta puede representarse a través de las funciones base senos y cosenos debiéndose cumplir que sean ortogonales a través de una combinación apropiada entre ellas, por lo que el producto interno de las respectivas funciones sea cero.
- **Cambio de escala:** Una función base cambia en escala "cortando en pedazos" dicha función en diferentes tamaños de escala. Ejemplo de ello, sea una señal en el dominio de 0 a 1, la cual puede dividirse en funciones de dos etapas con rango de 0 a $1/2$ y de $1/2$ a 1. Posteriormente se vuelve a dividir la señal original en funciones de cuatro etapas de 0 a $1/4$, $1/4$ a $1/2$, $1/2$ a $3/4$ y de $3/4$ a 1. Por lo tanto cada conjunto de representaciones codifica la señal original en una escala o *resolución* particular.

Finalmente, el tercer antecedente se refiere a la concentración de energía de una función $f(x)$, la cual se expresa de la forma:

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx, \quad (12)$$

² La importancia de transformar una función es la posibilidad de obtener mayor información de la misma respecto de aquella disponible en la señal original.

³ El principio de incertidumbre de Heisenberg establece que no es posible conocer exactamente qué frecuencia existe en qué instante del tiempo, sino únicamente conocer las bandas de frecuencia e intervalos de tiempo.



y se encuentra relacionada con el teorema de Parseval referente a la ley de la conservación, en donde el total de energía de una onda es la suma de todos los componentes de Fourier.

Descomposición por Multiresolución

La característica principal de la Transformada de Fourier es representar una función compleja por medio de la suma ponderada de funciones simples, que a la vez se obtienen a partir de una función más simple conocida como prototipo o función base. Su principal ventaja es que tiene una representación de *soporte compacto perfecto* en el dominio de la frecuencia, esto es, que es capaz de representar perfectamente el contenido espectral de una señal pero no tiene alguna indicación de su localización en el tiempo.⁴ Dada esta situación, la Transformada de Fourier no es capaz de representar señales cuyo contenido espectral cambia a través del tiempo (señales no estacionarias).

La modificación que sufrió entonces la Transformada de Fourier con el propósito de poder representar señales no estacionarias, fue desarrollada por Gabor al establecer la Transformada de Fourier de Corto Tiempo (TFCT). La TFCT trabaja segmentando la señal a través de una función ventana localizable en el tiempo y posteriormente analiza cada segmento de la señal. Sin embargo, la ventana que utiliza la TFCT es la misma para analizar toda la señal, lo cual hace inadecuado su uso para analizar señales con componentes de frecuencia muy alta pero con periodos de tiempo muy cortos y con componentes de frecuencia muy baja pero con periodos de tiempo muy largos.

La TFCT trabaja removiendo aquella porción de la señal deseada y posteriormente se aplica la Transformada de Fourier a dicha porción. Para ello, se requiere una función conocida como ventana a través de la cual es posible remover la porción deseada de la señal, por lo que la TFCT es también conocida como *Transformada de Fourier ventaneada*; donde una función ventana es aquella valuada en los reales, $(t) \in L^2(\mathbb{R})$, cuya finalidad es remover alguna porción de la señal original, esto es, la convolución de la señal original con la función ventana, $f(t) * (t-b) : f_b(t)$. El resultado es la información contenida de $f(t)$ en la vecindad de $t = b$, donde el valor de la convolución será cero fuera del intervalo deseado y b representa la magnitud con la cual se puede desplazar la función ventana sobre el eje del tiempo.

Contrario a la TFCT, la Transformada wavelet permite el análisis en tiempo-frecuencia ya que trabaja con una función ventana-cambiante, la cual representa la convolución de una función wavelet con la señal original donde

⁴ Un conjunto S es compacto si, de cualquier secuencia de elementos X_1, X_2, \dots de S , es posible extraer siempre una subsecuencia la cual tiende a algún elemento límite de X en S ; los conjuntos compactos son por lo tanto cerrados y limitados.



la función wavelet dependerá de dos parámetros: 1) traslación (localización), el cual representa el movimiento de la función wavelet sobre el eje del tiempo; y, 2) dilatación, el cual permite la expansión y contracción de la función wavelet y a través del cual se pueden capturar las frecuencias (altas o bajas) de la señal original. Lo anterior hace de la Transformada wavelet flexible para el análisis en el dominio tiempo-frecuencia de señales (series de tiempo) en el contexto de no-estacionariedad.

La Figura 1 ilustra las cajas de Heisenberg cuando se aplica la Transformada wavelet y se busca analizar una señal, en donde las cajas muestran la expansión y contracción de la función según las frecuencias que se busquen capturar y su ocurrencia en el tiempo. El gráfico inferior muestra la serie de tiempo y la flexibilidad de la función wavelet en cuanto a su habilidad para trasladarse sobre el eje del tiempo y dilatarse o contraerse según las frecuencias que esté capturando. El gráfico superior muestra las cajas de Heisenberg en el plano frecuencia-tiempo, en donde se observa las diferentes amplitudes de las cajas según las frecuencias que la función wavelet captura a través del tiempo: para frecuencias bajas, las cajas se expanden para poderlas capturar con mejor resolución en el tiempo, lo cual refleja la dilatación de la función wavelet; y para frecuencias altas, las cajas se contraen para poderlas capturar con mejor resolución cuando este tipo de frecuencias ocurren en periodos de tiempo muy cortos, lo cual refleja la contracción de la función wavelet.

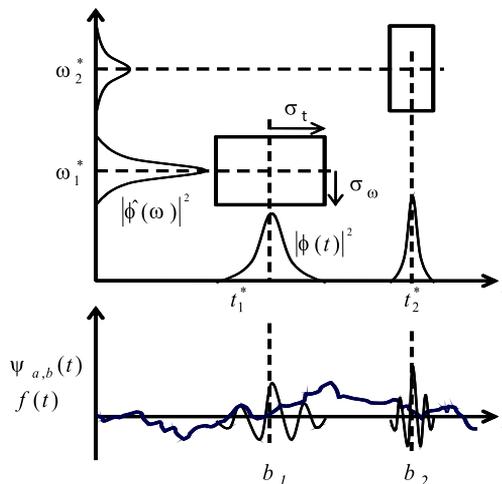


Figura1: Cajas de Heisenberg en el plano frecuencia-tiempo y la función wavelet.

La Transformada wavelet trabaja en dirección opuesta respecto de la TFCT, la cual primeramente descompone la señal original en bandas de frecuencia y después la analiza a través del tiempo:



$$W(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int f(t) \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt, \quad (13)$$

y la señal original puede reconstruirse (Transformada wavelet inversa) de la forma:

$$f(t) = \frac{C_\psi}{a^2} \int_{a>0} \int_b W(a,b) \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) da db, \quad (14)$$

donde $a > 0$ y b son los parámetros de dilatación y localización, respectivamente; ψ es la wavelet madre, C es una constante que depende de ψ y $W(a,b)$ es la Transformada wavelet continua (TWC). Así mismo, la Transformada wavelet puede representarse como el producto interno:

$$W(a,b) = \langle x, \psi_{a,b} \rangle, \quad (15)$$

Dos funciones wavelet continuas comunes, cuyas representaciones se muestran en la Figura 2, son:

$$M(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i \omega_0 t} e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad (16)$$

conocida como *wavelet Morlet*, donde $i = -1$ es un número imaginario y ω_0 es la frecuencia central de la wavelet; y,

$$\psi(t) = (1 - t^2) e^{-t^2/2}, \quad (17)$$

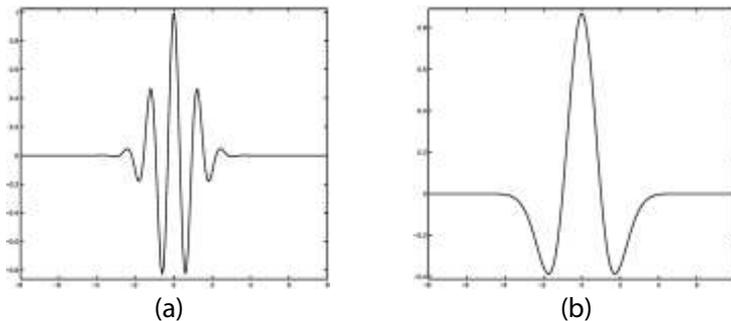


Figura 2: Función wavelet (a) de Morlet y (b) Sombrero Mexicano.

conocida como *wavelet sombrero mexicano*, la cual representa la segunda derivada de la función de distribución Gaussiana, $e^{-t^2/2}$, con varianza unitaria y factor de normalización $1/\sqrt{2}$.



Transformada Wavelet Discreta

La Transformada wavelet continua es una función que depende de dos parámetros continuos, lo cual da como resultado información redundante, esto es, un número variante de coeficientes con un número reducido de escalas. Dicho problema es resuelto *discretizando* los parámetros *a* y *b* a través del análisis por multiresolución (Mallat, 1989: 676-677, 681), en el cual se aplican iterativamente filtros de alto y bajo paso y subsecuentemente se muestrean en forma de cascada. El anterior proceso resulta en la Transformada wavelet discreta (TWD).

La TWD es la transformada ortonormal en el nivel *J* de un vector $X, W = X$, donde *W* es un vector columna de longitud *N* el cual contiene los coeficientes de la transformada: los primeros elementos $N - N/2^l$ representan los coeficientes wavelet y los últimos elementos $N/2^l$ representan los coeficientes de escala; *y*, es una matriz ortonormal $N \times N$ valuada en los reales, esto es, una matriz que satisface $T = I$. La forma de construir una matriz *W* es a través de un filtro (de alto-paso) wavelet

$$h_{1,0}, \dots, h_{1,L_1-1}, \tag{18}$$

para L_1, N , y

$$\sum_{l=0}^{L_1-1-2l} h_{1,n} h_{1,n+2l} = \begin{cases} 1, & l = 0 \\ 0, & l = 1, 2, \dots, (L_1 - 2)/2. \end{cases} \tag{19}$$

Lo cual satisface la propiedad de integración a cero

$$\sum_{l=0}^{L_1-1} h_l = 0 \tag{20}$$

y energía unitaria

$$\sum_{l=0}^{L_1-1} h_l^2 = 1, \tag{21}$$

donde $h_{l,n}$ es el filtro asociado a la escala $t = 1/t$ el cual se aproxima a un filtro de alto-paso con una banda de paso definido en el intervalo de frecuencias $1/4t, 1/2t$.

⁵ *X* es una secuencia de *N* observaciones provenientes de una serie de tiempo valuada en los reales y que representa un vector de observaciones de longitud diádica ($N=2J$), donde *Xt* es la observación en el tiempo *tDt* (*Dt* es el intervalo de tiempo entre cada observación adyacente).



De esta forma, el proceso de filtración de las observaciones x_t de una serie de tiempo a través de funciones de alto-paso (wavelet) se puede representar como

$$x_t \rightarrow H(\omega) \rightarrow u_{j,t}, \quad (22)$$

donde

$$H(\omega) = \prod_{j=1}^J H_j(\omega), \quad (23)$$

es la función transferencia de h_t , y $u_{j,t}$ es la convolución de x_t con h_t .

En general, al proceso de filtración de una señal a través de filtros de alto- y bajo-paso se le conoce como *descomposición por multiresolución*. En particular, cuando la filtración es vía la TWD se le conoce como representación wavelet de la descomposición por multiresolución, la cual sirve tanto para descomponer una señal en diferentes escalas como en la reconstrucción de la misma (Mallat, 1989: 681-682).

La Figura 3 ilustra el proceso de descomposición en un nivel de un vector X utilizando la función wavelet h_t y la función de escalamiento g_t ,⁶ donde el símbolo 2 significa que de cada 2 muestras que producen los filtros, una es la que se mantiene, por lo que la longitud en cada nuevo vector W_j de coeficientes wavelet tendrá una longitud de $N/2^j$.

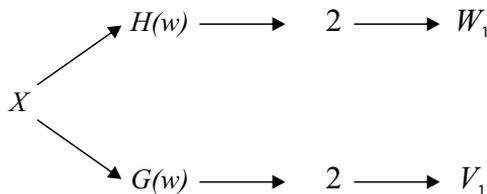


Figura 3: Representación de la Descomposición por Multiresolución (Mallat, 1989: 681).

Ejemplos comunes de filtros wavelet discretos se refieren a las funciones de Haar y de Daubechies. El primero hace referencia a un filtro de longitud 2 y definido por filtros de escalamiento de la forma

$$g_0 = g_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (24)$$

equivalente a filtros de alto-paso

⁶ El filtro de escalamiento se conoce también como filtro espejo de la cuadratura ya que representa el inverso respecto del filtro wavelet: $h_l = (-1)^{|l-1|} g_{L-1-l}$.



$$h_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{25}$$

La Figura 4 muestra la representación de la función wavelet de Haar y de Daubechies, donde la primera tiene la característica principal en ser el único filtro ortonormal de soporte compacto simétrico. Sin embargo, es poco usual en aplicaciones reales ya que es una aproximación pobre a un filtro ideal de pase de banda.

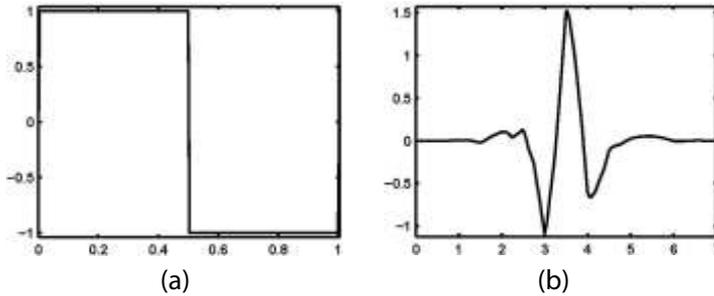


Figura 4: Función wavelet (a) de Haar y (b) de Daubechies.

El segundo ejemplo de filtro discreto, wavelet de Daubechies, hace referencia a una función de soporte compacto con un número máximo de momentos de decaimiento y aunque no existe una forma explícita de representar a este tipo de filtros, se pueden definir a través del cuadrado de la función ganancia del filtro de escalamiento de la forma:

$$G(f) = 2 \cos^L(\pi f) \sum_{l=0}^{L/2-1} \left(\frac{L/2-1+l}{l} \right) \sin^{2l}(\pi f), \tag{26}$$

donde la longitud L del filtro es un número par entero y el primer término de la suma se define como

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(b+1)\Gamma(a-b+1)}. \tag{27}$$

Asimismo, el cuadrado de la función ganancia del filtro wavelet se expresa de la forma

$$H(f) = 2 \sin^L(\pi f) \sum_{l=0}^{L/2-1} \left(\frac{L/2-1+l}{l} \right) \cos^{2l}(\pi f). \tag{28}$$



Daubechies (Daubechies, 1988: 914-921) mostró que cuando los parámetros a (dilatación) y b (traslación) de una función wavelet se representan de la forma 2^j y $2^j k$ respectivamente, es posible construir funciones base ortonormales de wavelets con soporte compacto. Por consiguiente, la integral en (13) se vuelve

$$W(k2^{-j}, 2^{-j}) = 2^{j/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi(2^j t - k) dt, \tag{29}$$

la cual se aproxima de la forma

$$W(k2^{-j}, 2^{-j}) \approx 2^{j/2} \sum_n f(n) \psi(2^j n - k) \tag{30}$$

Dado lo anterior, es posible representar la secuencia de funciones wavelet (madre) y de escalamiento (padre), ψ y ϕ , respectivamente, de la forma

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j} t - k) = 2^{-j/2} \psi\left(\frac{t - 2^j k}{2^j}\right), \tag{31}$$

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \phi(2^{-j} t - k) = 2^{-j/2} \phi\left(\frac{t - 2^j k}{2^j}\right). \tag{32}$$

Por lo tanto, una función $f(t)$ se representará de la forma

$$f(t) = \sum_k s_{j,k} \psi_{j,k}(t) + \sum_k d_{j,k} \phi_{j,k}(t) + \sum_k d_{j-1,k} \phi_{j-1,k}(t) + \dots + \sum_k d_{1,k} \phi_{1,k}(t), \tag{33}$$

donde los coeficientes $s_{j,k}$ y $d_{j,k}, \dots, d_{1,k}$ son los coeficientes de la Transformada wavelet contenidos en W , los cuales miden la contribución de la función wavelet en la señal original. Los coeficientes $s_{j,k}$ son los coeficientes de suavización y representan el comportamiento suave implícito en la señal a escalas gruesas (no refinadas) 2^j ; $d_{j,k}$ son los coeficientes de detalle también conocidos como cristales, los cuales representan las desviaciones del comportamiento suave, donde $d_{j,k}$ describe las desviaciones en la escala gruesa y $d_{j-1,k}, \dots, d_{1,k}$ son las desviaciones a escalas finas.

En conclusión, la función $f(t)$ podrá representarse en términos de su *serie de detalles* en diferentes resoluciones

$$D_j(t) = \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad \text{para } j=1, 2, \dots, J \tag{34}$$



y variaciones suaves

$$S_j(t) = \sum_k s_{j,k} \phi_{j,k}(t) \quad (35)$$

teniendo como resultado

$$f(t) = S_j(t) + D_j(t) + D_{j-1}(t) + \dots + D_1(t) \quad (36)$$

lo cual es descrito igualmente como análisis por multiresolución.

Transformada Wavelet Discreta de Máximo Traslapo (TWDMT)

La TWDMT es una versión modificada *no-diezmada* de la Transformada wavelet discreta, la cual trabaja sobre cualquier tamaño de muestra N sin limitarse a una longitud diádica de observaciones como lo es la TWD. Lo anterior hace que la TWDMT no sea sensible al punto inicial de la serie de tiempo y ello se logra eliminando el método de submuestreo al aplicar doblemente el algoritmo piramidal de la TWD, tomando aquellos resultados descartados del filtro TWD vía filtración circularmente desplazada.

Los nuevos vectores columna, $\tilde{W}_1, \tilde{W}_2, \dots, \tilde{W}_j$, contendrán los coeficientes wavelet resultado de la TWDMT asociados a cambios en cada escala $j = 2^l$ y mayores:

$$\tilde{W} \equiv [\tilde{W}_1 \tilde{W}_2 \dots \tilde{W}_j \tilde{V}_j]. \quad (37)$$

Las diferencias entre la TWD y la TWDMT se enumeran a continuación:

1. La TWDMT de orden J -ésimo se define adecuadamente para una muestra de tamaño N , mientras que la TWD se restringe a una muestra de tamaño diádica 2^l .
2. Los coeficientes de detalle y suavización vía TWDMT se asocian a filtros de fase-cero, lo cual significa que es posible alinear eventos de la serie de tiempo original con las características del análisis por multiresolución.
3. La TWDMT es invariante en desplazamientos, lo cual significa que desplazando circularmente la serie de tiempo en cualquier monto, la TWDMT se desplazará igualmente en forma circular en el mismo monto.
4. La TWDMT desarrolla un análisis de la varianza con estimadores asintóticamente más eficientes que la TWD.

Datos y Análisis de Resultados

En este documento se utilizan precios de cierre ajustados por pago de derechos del principal índice accionario de México (IPC) con periodicidad diaria, los cuales se transforman en rendimientos logarítmicos de la forma:



$$Ret_t = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}}. \quad (38)$$

La muestra consiste en 2,506 observaciones que comprende el periodo del 3 de enero de 2000 al 31 de diciembre de 2009, con datos obtenidos de Yahoo Finance. El análisis por wavelets se desarrolló utilizando el software S-Plus versión 8.0.

El Cuadro 1 muestra los estadísticos descriptivos de los rendimientos logarítmicos, donde se observa que en el periodo de estudio el IPC ha ofrecido en promedio un rendimiento diario positivo. En un día de operación, el IPC mostró variabilidad fuerte al registrarse un rendimiento máximo de 10.44% y mínimo de -8.27%, lo cual, comparado con el rendimiento promedio de 0.0604% refleja la presencia de valores extremos y da pie a que el mercado accionario presente un comportamiento del tipo leptocúrtico o de *colas pesadas*, fenómeno también explicado por la presencia de volatilidad condicionada y agrupada (Ruppert, 2004: 372). Igualmente, el sesgo muestra que el IPC ha experimentado más rendimientos extremos positivos que negativos, fenómeno que puede capturarse por modelos estocásticos con implicaciones en la cuantificación del riesgo. La prueba de Jarque-Bera a un nivel de significancia del 0.05, permite rechazar la hipótesis nula de normalidad en los rendimientos diarios, dato que se sustenta igualmente con el valor de curtosis mayor a tres.

Cuadro 1: Estadísticos descriptivos de los rendimientos del IPC

Media	0.000604
Máximo	0.104407
Mínimo	-0.082373
Desv. Estd.	0.015455
Sesgo	0.059053
Curtosis	6.870680
Jarque-Bera (JB)	1564.5940
Probabilidad (JB)	0.000000

Descomposición por Multiresolución (DMR) del IPC

La Figura 5 muestra la descomposición por multiresolución (DMR) con base en la ecuación (34) en siete niveles de resolución, también conocidos en la teoría de wavelets como cristales o detalles, cuya descomposición se realizó a través de la función de Daubechies de mínima asimetría MA (8). Cada detalle D_j está relacionado con una escala de tiempo diferente: el primer detalle o nivel de resolución D_1 captura los componentes de frecuencias más altas de



los rendimientos del IPC que ocurren en el horizonte de tiempo más corto entre 2^0 y 2^1 y 2 días. El siguiente nivel D_2 muestra los componentes de frecuencia menores a los del nivel D_1 que ocurren en una escala de tiempo 2^1 y 2^2 a 4 días. Así sucesivamente hasta el nivel D_7 (2^7 2⁶ 64 a 128 días) y finalmente el nivel S_7 , el cual muestra el componente de suavización que integra los componentes con las frecuencias más bajas en escalas de tiempo mayores a 2^7 2⁸

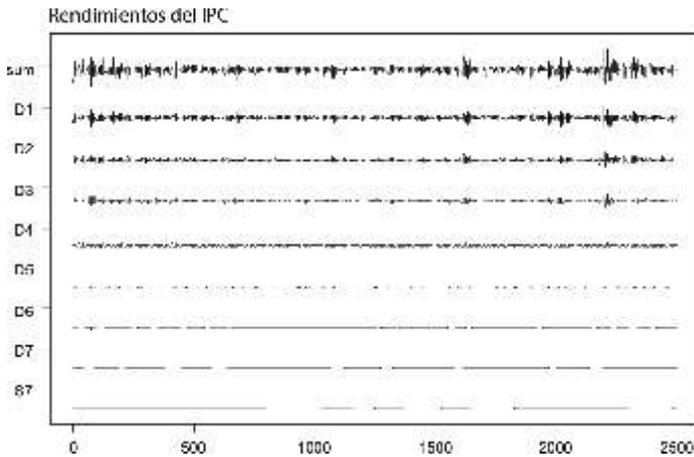


Figura 5: Descomposición por Multiresolución de los rendimientos del IPC en 7 niveles.

Una herramienta funcional en el análisis por wavelets para determinar el número de niveles necesarios para descomponer una señal, hace referencia a la Distribución de Energía, la cual muestra la contribución que cada nivel de resolución representa de la señal original. El Cuadro 2 muestra el porcentaje que cada nivel de resolución captura de la serie de tiempo de los rendimientos del IPC.

Cuadro 2: Distribución de Energía de la DMR de los Rendimientos del IPC.

Cristal	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	S7
Energía (%)	43.549	28.32	15.261	6.416	2.954	1.902	0.679	0.918

Se aprecia que el nivel D_1 acumula el 43% y es suficiente hasta un nivel de resolución D_7 , ya que hasta ese detalle la concentración de energía ha llegado al 99%.

El Cuadro 3 muestra los estadísticos descriptivos para cada nivel de resolución, en el cual se aprecia que en escalas mayores de tiempo la distribución de probabilidad de los rendimientos del IPC converge a una normal.⁷ Se observa

⁷ Los valores que se obtienen en cada nivel corresponden a valores reescalados de la señal original debido al mismo proceso de filtración o convolución de la serie de tiempo con la función wavelet utilizada como filtro.



a través del sesgo en cada uno de los niveles de resolución que el mercado accionario ha ofrecido mayormente rendimientos positivos que negativos en horizontes de tiempo de muy inmediato plazo, comparado con horizontes mayores a los 16 días donde la rentabilidad del mercado ha sido mayormente negativa que positiva. Igualmente es observable que el valor de curtosis disminuye para escalas con mayor duración de tiempo, aunque en el nivel D_7 , equivalente a una duración de tiempo entre 4 y 8 días, es donde se presenta el mayor valor del respectivo estadístico.

Cuadro 3: Estadísticos descriptivos en 7 niveles de resolución de los rendimientos del IPC.

	IPC	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	S7
Media	8.423944	7.238782	6.195106	5.162841	4.059872	3.032653	2.031093	1.014677	0.019519
Máximo	8.952381	7.513297	6.394216	5.332034	4.131948	3.064916	2.063552	1.026883	0.032456
Mínimo	8.000000	7.000000	6.000000	5.000000	4.000000	3.000000	2.000000	1.000000	0.000000
Desv. Estd.	0.078664	0.047715	0.033549	0.024271	0.015646	0.010818	0.008876	0.004819	0.006875
Sesgo	0.059112	0.038504	0.020982	0.042031	0.097912	-0.053376	-0.076188	-0.167031	-0.569223
Curtosis	6.873417	5.759687	5.720069	8.451700	4.706043	3.396127	4.894762	2.987369	3.100873
Jarque-Bera (JB)	1567.434	795.5256	772.4309	3102.87	307.7947	17.56761	377.1423	11.66469	136.3383
Probability (JB)	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000153	0.000000	0.002931	0.000000

Dado que un valor alto de curtosis es resultado de valores extremos y la presencia de estos se deben al fenómeno de volatilidad condicionada no constante (Ruppert, 2004: 372), el hecho de registrarlo en una duración de tiempo de 4 a 8 días se puede explicar como un comportamiento del mercado en realizar grandes liquidaciones de sus activos en dicho horizonte de tiempo posterior a una tenencia de 4 días. Lo anterior se realiza con el propósito de rebalancear los portafolios y tomar utilidades, lo que hace que los precios de los activos muestren cambios más bruscos (valores extremos) respecto a otros horizontes de tiempo. Obsérvese que en escalas de tiempo mayor el valor de curtosis es más bajo, reflejando una posición más conservadora por el mercado en el largo plazo, esto es, en un horizonte de largo plazo se observa una administración pasiva respecto a plazos inmediatos caracterizados por una administración más activa de las carteras.

Por lo anterior, junto con la prueba de Normalidad cuyo valor de Jarque-Bera disminuye para horizontes de mayor duración de tiempo, se sustenta el argumento en que la distribución de los rendimientos del mercado accionario converge a una Normal en escalas de tiempo mayores.⁸ Aunque este hecho podría invalidarse por el resultado mostrado en la escala D_6 , en general se observa el fenómeno de Gaussianidad-agregativa.

El comportamiento que se observa del IPC dados los resultados en diferentes escalas de tiempo, se clasifican como fenómenos de asimetría en el conjunto

⁸ El Anexo B presenta los estadísticos descriptivos estimados utilizando la función de Haar, a partir de los cuales la interpretación de los resultados no cambia. La estimación utilizando la función de Haar es importante, ya que por su característica en ser una función discreta es la que mejor ajustaría los rendimientos de activos financieros.



de *hechos estilizados* que han caracterizado a los rendimientos de activos financieros (Cont, 2001: 224), en donde: El primer fenómeno se refiere a la asimetría en ganancias/pérdidas, el cual establece que es igualmente observable grandes caídas pero no movimientos al alza en los precios de acciones y valores de índices accionarios. El segundo fenómeno identificado como Gaussianidad-agregativa, se refiere a que la distribución de los rendimientos se aproxima a una Normal cuando la escala de tiempo aumenta; de otra manera, la forma de la distribución no es la misma en diferentes escalas de tiempo (Véase Anexo C). Finalmente, el tercer fenómeno explica que medidas *granulosas-gruesas* de la volatilidad predicen en mejor manera la volatilidad en escalas finas que de manera contraria.

Los últimos dos fenómenos se describen de la siguiente forma (Cont y Tankov, 2003:3):

"... los precios se mueven esencialmente por brincos entre escalas de tiempo, aún siguen manifestando un comportamiento discontinuo hasta una escala mensual y únicamente después de una granulación-gruesa es que su comportamiento en escalas de tiempo mayores se obtiene algo que refleja un movimiento Browniano."

Lo anterior tendría sus implicaciones en finanzas y particularmente en administración de riesgos y valuación de activos, al tener que ajustar diferentes procesos estocásticos a los datos reales para diferentes horizontes de tiempo.

Análisis de la Varianza

La estimación de la varianza se fundamenta en el principio de conservación de energía de wavelets, en donde la ortonormalidad de la matriz W , esto es, $W^T W = X$ se pueda reconstruir $X = W^T W$, implica que la TWD sea una Transformada que preserve la energía tal que $\|W\|^2 = \|X\|^2$. Lo cual hace que la energía en X pueda descomponerse de escala en escala de la forma

$$\|X\|^2 = \|W\|^2 = \sum_{j=1}^J \|W_j\|^2 + \|V_j\|^2, \tag{39}$$

donde $\|W_j\|^2$ representa la contribución a la energía de X debido a los cambios en la escala j y $\|V_j\|^2$ representa la contribución debido a las variaciones en las escalas $j+1$ y mayores. En consecuencia, la varianza del proceso puede descomponerse de la forma

$$\hat{\sigma}_X^2 \equiv \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} (X_t - \bar{X})^2 = \frac{1}{N} \|W\|^2 - X^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^J \|W_j\|^2 + \frac{1}{N} \|V_j\|^2 - X^2, \tag{40}$$



donde $\hat{\sigma}_x^2$ es la varianza muestral de \bar{X} y $\bar{X} = 1/N \sum_{t=1}^N X_t$ es la media muestral. A partir de (38), el estimador insesgado de la varianza wavelet se representa como

$$\hat{\sigma}_X^2(\lambda_j) \equiv \frac{1}{2\lambda_j \hat{N}_j} \sum_{l=L_j}^{N_j-1} W_{j,t}^2, \quad (41)$$

donde $N_j = N/2^j$, $\hat{N}_j = N_j - L_j$, y $L_j = \lfloor (L-2)(1-2^{-j}) \rfloor$.⁹

La varianza wavelet vía TWDMT en cada escala se define como

$$\hat{\sigma}_X^2(\lambda_j) = \text{var}(\bar{W}_{j,t}) \quad (42)$$

donde

$$\bar{W}_{j,t} = \sum_{l=0}^{L_j-1} h_{j,l} X_{t-l}, \quad t \in Z, \quad (43)$$

es la señal filtrada a través de los filtros wavelet $\bar{h}_{j,l}$ de longitud $l=0, \dots, L_j$ para niveles $j=1, \dots, J$. En si $\bar{W}_{j,t}$ representa un proceso estocástico filtrado utilizando la TWDMT. Si la varianza wavelet existe y es finita, su representación cuando es dependiente del tiempo es de la forma

$$\hat{\sigma}_{X,t}^2(\lambda_j) = \text{var}(\bar{W}_{j,t}) \quad (44)$$

La Figura 6 muestra la descomposición de la varianza con base en la ecuación (40) que se obtiene a partir de la descomposición por multiresolución de los rendimientos del IPC vía la TWDMT. Se observa que la varianza disminuye en escalas de tiempo mayores, lo cual puede interpretarse como una disminución del riesgo en horizontes de tiempo de largo plazo. En la respectiva figura, "EDOF Forma 1" hace referencia a los *grados de libertad equivalentes* que se estiman cuando la muestra es grande; y "EDOF Forma 3", hace referencia a los *grados de libertad* cuando igualmente la muestra es grande pero la varianza muestral es desconocida.

La importancia en descomponer la varianza en diferentes niveles de resolución asociados a escalas de tiempo, recae en la definición de Valor en Riesgo al preguntar por la pérdida máxima esperada dado un nivel de confianza en un horizonte de tiempo. Por lo que al descomponer una serie en escalas de tiempo se observa que las pérdidas potenciales son mayores en horizontes de tiempo de corta duración, comparadas con aquellas cuando las frecuencias son menores en escalas de tiempo mayores. Por lo tanto, las frecuencias más altas y que ocurren en escalas menores serán las de mayor contribución marginal a la pérdida total esperada (Fernández, 2005: 16).

⁹ Donde $\lfloor \cdot \rfloor$ representa el mínimo de dos cantidades. Véase Serroukh, Walden y Percival (2000) para un desarrollo a detalle de la varianza wavelet.

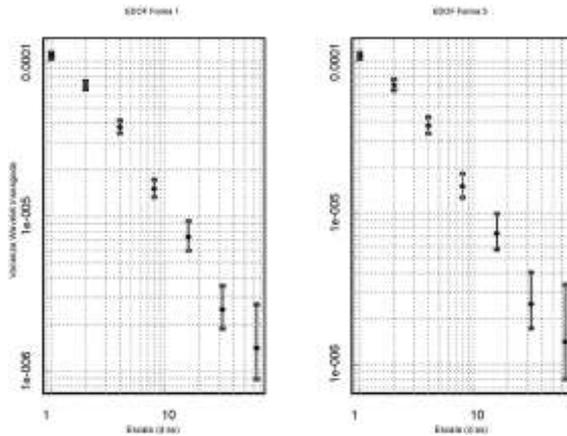


Figura 6: Descomposición de la varianza en 7 niveles de resolución.

Conclusiones

Uno de los beneficios de aplicar el análisis por wavelets, en particular la descomposición por multiresolución de una serie de tiempo, se basa en la habilidad para analizar fenómenos de temporalidad, no estacionariedad y de variación en el tiempo, fenómenos que han caracterizado a las series de tiempo financieras, por lo que wavelets tienen la flexibilidad de mirar el bosque y a la vez los árboles (Graps, 2005: 50). Lo anterior hace que a través de este enfoque y contrario al análisis de Fourier, sea posible capturar los componentes de frecuencias más altas que ocurren en horizontes de tiempo de menor duración y componentes de frecuencias más bajas que ocurren en horizontes de tiempo de mayor duración.

En este documento se aplicó la descomposición por multiresolución vía la TWDMT y como principal filtro la función de Daubechies de mínima asimetría (MA) de longitud 8, también conocida en la literatura de wavelets como symmlet S8; lo anterior se justifica por sus propiedades y propósitos prácticos (Härdle et al, 1998: 65-67). Los resultados mostraron hasta un nivel de resolución de siete detalles, la presencia del fenómeno asimétrico identificado como *Gaussianidad-agregativa*, en donde la distribución de los rendimientos del IPC no es la misma en las diferentes escalas de tiempo. Se identificó que en escalas menores la distribución de los rendimientos se aproxima en mejor forma a una distribución t-Student y en escalas mayores la distribución ajusta en mejor forma a una Normal.

Así mismo, se observó a través del estadístico sesgo que el mercado accionario ha generado mayores rentabilidades positivas en el inmediato plazo que en plazos mayores, al obtenerse un valor negativo del sesgo en escalas de tiempo mayores a 16 días. Complementando el análisis con el valor de curtosis, se tiene que en escalas de tiempo de menor duración el mercado accionario mexicano es descrito bajo un comportamiento del tipo extremo en donde la presencia de movimientos bruscos han dominado al mercado accionario. En contraste, para escalas de tiempo de mayor duración los cambios en precios son menos abruptos, lo cual se



refleja en un valor de curtosis cercano a tres, esto es, un mercado accionario descrito mayormente como uno Normal.

Según los anteriores resultados junto con los valores obtenidos de la varianza wavelet, la cual disminuye en la medida que la escala de tiempo aumenta, se argumentaría que el mercado, dada una actitud *aversa* al riesgo, ha estado dispuesto a intercambiar un mayor rendimiento por un mayor riesgo en horizontes de inversión de muy corta duración respecto a horizontes de mayor duración. Aunque el concepto de mayor riesgo implica mayor varianza pero no viceversa (Rothschild y Stiglitz, 1970: 226-227), se asume que se satisface el segundo orden de dominancia estocástica para el agente económico cuya actitud al riesgo es *aversa*. En la perspectiva del Valor en Riesgo, las pérdidas potenciales serían mayores en escalas de tiempo de menor duración respecto a escalas de tiempo de mayor duración (Fernández, 2005: 16).

Los resultados obtenidos en este documento tienen sus implicaciones en la estructuración y administración de carteras al considerar la importancia del horizonte de inversión en el tiempo de tenencia de activos que logre maximizar el valor de la cartera. En administración de riesgos, los resultados obtenidos tendrían sus implicaciones para los requerimientos de capital según el horizonte de tiempo definido para el portafolio de inversión.

Este documento plantea pero no demuestra según los resultados obtenidos, que la administración activa de carteras en el muy corto plazo genera los cambios bruscos en los precios de activos, y en plazos mayores se refleja una administración más pasiva, por lo que estos resultados estarían sujetos a un riguroso examen. Igualmente, es factible emplear el enfoque de wavelets para validar el hecho estilizado en que la volatilidad en escalas gruesas predice en mejor manera la volatilidad en escalas finas (Cont, 2001: 224).

Bibliografía

- Burrus, C. Sidney, Gopinath, Ramesh A. and GUO, Haitao (1998). Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms, A Primer. New Jersey: Prentice Hall.
- Cont, Rama (2001). Empirical Properties of Asset Returns: Stylized Facts and Statistical Issues. En: Quantitative Finance N° 1. Francia: Institute of Physics Publishing.
- Cont, Rama and Tankov, Peter (2003). Financial Modelling With Jump Processes. London: Chapman & Hall.
- Daubechies, Ingrid (1988). Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets. En: Communications on Pure and Applied Mathematics N° 41. USA: John Wiley & Sons, Inc.
- Fernández, Viviana (2005). The Intertemporal CAPM and a Wavelet-Based Decomposition of Value at Risk. En: Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics N° 9. USA: The Berkeley Electronic Press.
- Gencay, Ramazan, Selcuk, Faruk, and Whitcher, Brandon (2002). An



Introduction to Wavelets and Other Filtering Methods in Finance and Economics. USA: Academic Press.

- Graps, Amara (1995). An Introduction to Wavelets. En: IEEE Computational Science and Engineering N° 2. USA: IEEE Computer Society.
- Härdle, Wolfgang, Kerkyacharian, Gerard, Picard, Dominique, and Tsybakov, Alexander (1998). Wavelets, Approximation and Statistical Applications. Germany: Lecture Notes in Statistics, Springer.
- Indices: Market Statistics for Indices. (n.d.). Obtenido el 12 de abril de 2010, de <http://finance.yahoo.com/indices>
- Lee, Hahn Shik (2004). International Transmission of Stock Market Movements: A Wavelet Analysis. En: Applied Economics Letters N° 11. UK: Routledge Taylor & Francis, Ltd.
- Mallat, Stephane (1989). A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation. En: IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence N° 11. USA: IEEE Computer Society.
- Norsworthy, John, LI, Ding, and Gorener, Rifat (2000). Wavelet-Based Analysis of Time Series: An Export from Engineering to Finance. Proceedings of the 2000 IEEE Engineering Management Society. Albuquerque, USA.
- Ramsey, James, and Lampart, Camille (1999). The Decomposition of Economic Relationships by Time Scale using Wavelets: Expenditure and Income. En: Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics N° 3. USA: The Berkeley Electronic Press.
- Rothschild, Michael, and Stiglitz, Joseph (1970). Increasing Risk: I. A Definition. En: Journal of Economic Theory N° 2. USA: Elsevier.
- Ruppert, David (2004). Statistics and Finance: An Introduction. USA: Springer.
- Serroukh, Abdeslam, Walden, Andrew, and Percival, Donald (2000). Statistical Properties and Uses of the Wavelet Variance Estimator for the Scale Analysis of Time Series. En: Journal of the American Statistical Association N° 449. USA: American Statistical Association.
- Téllez, Jesus Cuauhtemoc, Vargas, Teresa, and Hernández, Jose Antonio (2009). Estimating Market Risk under a Wavelet-Based Approach: Mexican Case. Proceedings of the Second IEEE International Conference on Computer Science and Information Technology. Beijing, China.
- Valens, Clemens (2004). A Really Friendly Guide to Wavelets. Disponible en internet: <http://pagesperso-orange.fr/polyvalens/clemens/wavelets/wavelets.html>. Consultado 29.02.08.
- Xiong, Xiong, Zhang, Xiao-Tao, Zhang, Wei, and LI, Cui-Yu (2005). Wavelet-Based Beta Estimation of China Stock Market. Proceedings of 2005 IEEE International Conference on Machine Learning and Cybernetics. Guangzhou, China.



Anexos

A: Descomposición por Multiresolución de los Rendimientos del IPC

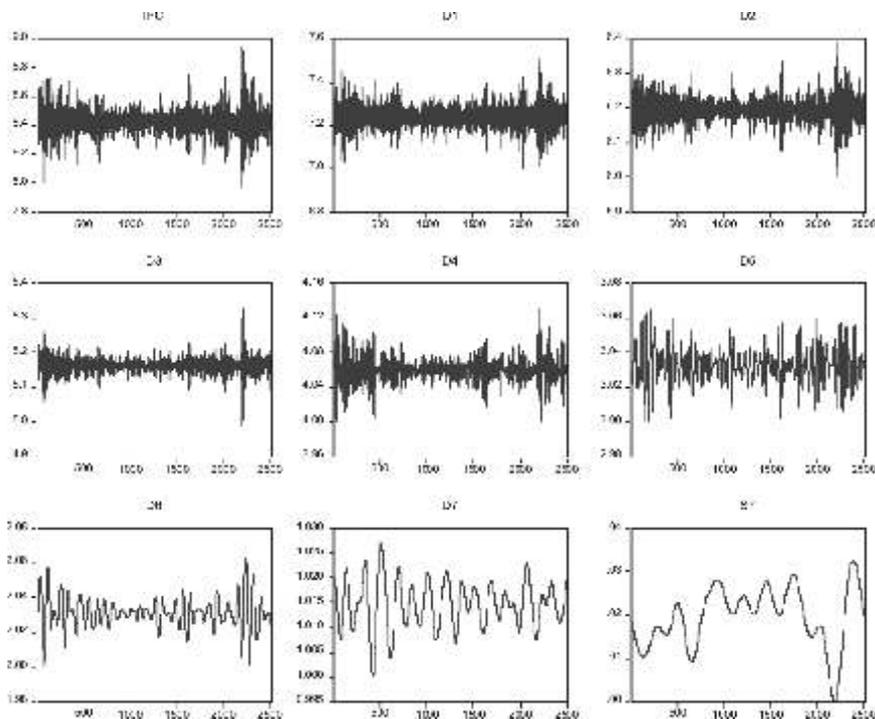


Figura 7: Descomposición por Multiresolución de rendimientos del IPC en 7 niveles vía TWDMT y función wavelet de Daubechies MA (8).

B: Estadísticos Descriptivos vía función de Haar

Cuadro 4: Estadísticos Descriptivos en 7 Niveles de Resolución de los Rendimientos del IPC vía función de Haar.

	IPC	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	S7
Media	8.423944	7.219115	6.136160	5.115974	4.044057	3.028325	2.024019	1.010803	0.017468
Máximo	8.952381	7.501964	6.322280	5.244825	4.102520	3.053199	2.045868	1.019171	0.027352
Mínimo	8.000000	7.000000	6.000000	5.000000	4.000000	3.000000	2.000000	1.000000	0.000000
Desv. Estd.	0.078664	0.044120	0.027628	0.018042	0.011825	0.008021	0.006165	0.003568	0.005977
Sesgo	0.059112	0.136870	0.121913	0.073019	0.097448	-0.207050	-0.232106	-0.340224	-0.623705
Curtosis	6.873417	6.111330	5.841642	7.840610	4.737783	3.536163	4.863017	2.924954	2.885166
Jarque-Bera (JB)	1567.4340	1018.2100	849.0262	2447.8890	319.1657	47.9028	384.7600	48.9146	163.7871
Probability (JB)	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000



C: Cuantiles de los Niveles de Resolución del IPC

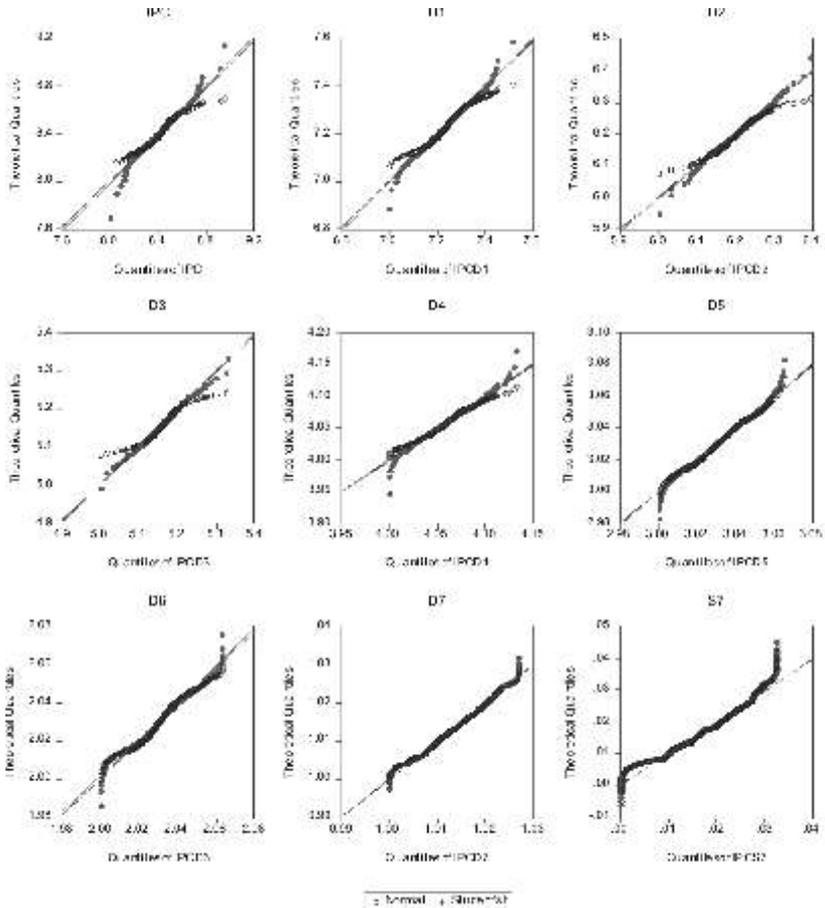


Figura 7: Cuantil Normal y t-Student para los 7 niveles de resolución del IPC.