

## ESTUDIO DE EFICIENCIA APLICADO A PRODUCTOS LÁCTEOS BAJO LA TÉCNICA DEA

Efficiency study applied to dairy products under Data Envelopment Analysis

Sergio Augusto Fernández Henao - María del Rocío Quesada Castro

COLOMBIA

### Resumen

Este artículo se da como resultado de un proyecto de investigación aplicado a una empresa láctea, donde, se implementó Análisis Envoltante de Datos (Data Envelopment Analysis-DEA) para evaluar la eficiencia técnica de sus principales productos. Éste se desarrolló en tres etapas. En la primera etapa se analizó y determinó cuáles eran las variables de entrada y de salida que afectan de manera relevante la *Eficiencia Relativa* de cada uno de los productos, con sus correspondientes escalas de medición. En la segunda, se implementaron los modelos CCR-I, BCC-I y ARG-I-V, con el objetivo de evaluar y ajustar el comportamiento de los pesos. Finalmente, en la última etapa se realizó un resumen comparativo de las eficiencias de los modelos utilizados y un plan de acción que la organización debería seguir para cada una de los productos que no alcanzaron la respectiva frontera de eficiencia, basados en el modelo elegido.

**Palabras Clave:** Análisis Envoltante de Datos, Eficiencia Técnica, Productividad.

### Abstract

This article is a result of an applied research project for a dairy company, where Data Envelopment Analysis-DEA is implemented to evaluate the technical efficiency of its main products. This was developed in three steps. In the first step, were analyzed and determined what input and output variables affects the relative efficiency of each of the products, with corresponding scale of measurement. In the second, the CCR-I, BCC-I and ARG-IV models, in order to evaluate and adjust the behavior of the weights were implemented. Finally, a comparative summary of the efficiencies of the models used, and a plan of action that organization should follow for each of the products that did not reach the respective efficiency frontier based on the chosen model was performed.

**Key Words:** Data Envelopment Analysis, Technical Efficiency, Productivity.



POLITÉCNICO COLOMBIANO  
JAIME ISAZA CADAVID

Sergio Augusto Fernández es Ingeniero Industrial y Magíster en Investigación Operativa y Estadística de la Universidad Tecnológica de Pereira, Docente de planta del Politécnico Colombiano Jaime Isaza Cadavid, Coordinador del Área de Producción del Programa de Ingeniería de Productividad y Calidad y Coordinador de la Red Académica de Productividad REDPROD. Integrante del Grupo de Investigación COINDE.  
Contacto: safernandez@elpoli.edu.co

María del Rocío Quesada es Ingeniera Industrial de la Universidad del Valle, Docente de planta del Politécnico Colombiano Jaime Isaza Cadavid, integrante de la Red Académica de Productividad REDPROD y del Grupo de Investigación COINDE.  
Contacto:mrquesada@elpoli.edu.co



## Resumo

Este artigo é resultado de um projeto de pesquisa aplicada para uma empresa de laticínios, onde, Análise Envoltória de Dados (Data Envelopment Analysis-DEA) foi implementado para avaliar a eficiência técnica dos seus principais produtos.

Este foi desenvolvido em três etapas. No primeiro passo, foi analisado e determinado quais foram as variáveis de entrada e saída que afecta a eficiência relativa de cada um dos produtos, com os correspondentes intervalos de medição. Na segunda, os modelos CCR-I, BCC-I, ARG-IV foram implementados, a fim de avaliar e ajustar o comportamento dos pesos. Por fim, um resumo comparativo das eficiências dos modelos utilizados foi feita e um plano de acção para os produtos que não atingiram a fronteira de eficiência é sugerido.

**Palavras-chave:** Análise Envoltória de Dados, Eficiência Técnica, Produtividade.

## Introducción

Generalmente, cuando las empresas desean comparar la gestión relativa y global de un grupo de unidades económicas que pueden ser bienes y/o servicios, las cuales, utilizan el mismo tipo de recursos (insumos), para producir un mismo tipo de productos (salidas), deciden utilizar simplemente “razones o cocientes de medida” de estas eficiencias (como productividad, rendimiento, etc.), con el consiguiente problema de que al mezclar distintos tipos de unidades de medida, se hace muy difícil e inexacta la comparación de su desempeño.

Estas técnicas fracasan normalmente en el intento de obtener una visión totalmente conjunta de la empresa, que permita a la vez, la valoración de la actuación y la fijación de objetivos para los insumos y productos utilizados que conduzcan a la mejora de la eficiencia global de las unidades utilizadas. Además, al ponderar con diferentes pesos a cada insumo y/o producto, las empresas se ven en la gran dificultad de llegar a un consenso sobre cómo debe ser la comparación de las distintas unidades (López et al, 2007).

Dado que la empresa láctea en cuestión (AURALAC S.A.)<sup>1</sup>, presenta un portafolio de productos con una participación importante en su mercado regional, se da el requerimiento de identificar y fortalecer aquellas variables endógenas (tales como: Horas-hombre, número de operario utilizados en cada proceso productivo, tiempos de fabricación, entre otras), que puedan desempeñar un papel importante para continuar con su trayectoria relevante en dicho mercado, y a la vez, fortalecerse productivamente para dar respuesta a objetivos de expansión.

---

*1 Auralac S.A. es una empresa del sector lácteo ubicada en la vereda Las Lajas vía Rionegro – Antioquia, su portafolio está compuesto por los siguientes productos genéricos: Bolsa de Leche, Yogurt, Queso, Quesito, Queso Crema, Mantequilla, Cuajada, Lechita, Saborizada, Kumis, Crema de Leche.*



Es así, como se presenta la necesidad de evaluar el rendimiento de su producción de una manera “comparativa, integral y cuantitativa”, de tal manera, que pueda identificar que productos están presentando debilidades (por falta de equilibrio en la asignación de recursos versus sus cantidades fabricadas) en determinadas variables relevantes que afectan la eficiencia del aprovechamiento de insumos y unidades producidas. Con lo cual, se podrá establecer un plan de mejoramiento que eleve las eficiencias de cada uno de sus productos y por ende, genere una fortaleza competitiva que aumente la capacidad de respuesta a los retos actuales del mercado globalizado.

Para ello, la técnica DEA (Data Envelopment Analysis – Análisis Envoltente de Datos, la cual, es una herramienta no paramétrica fundamentada en elementos de la Programación Lineal), se presenta como una alternativa de solución ideal para abordar este tipo de temáticas donde se desea encontrar un equilibrio entre lo que se consume y lo que se produce. Ya que, DEA se encarga de medir la Eficiencia Relativa de una serie de unidades económicas (Las cuales se desenvuelven en condiciones homogéneas de producción, insumos y entorno) y emitir una serie de resultados que permite analizar de manera integral lo que está ocurriendo con el aprovechamiento de insumos y obtención de resultados de los productos o unidades económicas analizadas (Guzmán et al, 2013).

Con este tipo de técnicas de optimización se permite también, que la organización revise sus estándares de productividad y/o eficiencia en su área de manufactura y los ajuste con base a los resultados encontrados por medio del modelo DEA implementado. Esto dará una clara señal de que tan cerca o que tan lejos se encuentran sus productos de las metas de eficiencia (sugerida por la organización, basada en conocimiento de expertos en el tema) y que acciones tomar para alcanzarlas.

### **Análisis Envoltente de Datos - DEA**

Para abordar el desarrollo e implementación del Análisis Envoltente de Datos (DEA – Data Envelopment Analysis), es necesario tener claridad sobre ciertos conceptos claves que maneja esta técnica. Ellos son: DMU, Productividad y La Eficiencia (Coelli et al, 2005).

La definición de la DMU (Decision Making Unit), unidad de evaluación, hace referencia a la unidad cuya eficiencia se desea medir con respecto a otras unidades de su clase. Es uno de los primeros pasos a llevar a cabo para la evaluación de desempeño comparativo (Charnes et al. 1978). Las DMUs deben ser unidades homogéneas en el sentido de que usan el mismo tipo de recursos para obtener el mismo tipo de resultados, aunque en cantidades variables.



En relación a la temática a tratar, la Productividad debe ser entendida como la relación entre el nivel de producción final obtenida y los recursos o insumos necesarios para lograrlo (Soto et al, 2010).

Es así, como Farrel en 1957 plantea la siguiente expresión matemática que representa la definición anterior:

$$\text{Productividad} = \frac{\text{Producción Creada}}{\text{Recurso Consumido}} = \frac{\text{Salida}}{\text{Entrada}} \quad (1)$$

Los conceptos de Salida y Entrada presentes en la fórmula uno, hacen referencia al resultado obtenido y al recurso utilizado respectivamente. Esta fórmula funciona correctamente cuando se tiene una sola entrada y una sola salida, sin embargo, en la mayoría de ocasiones se cuenta con varios tipos de recursos y varios resultados a obtener. Por lo tanto, es necesario realizar ciertos pasos previos para filtrar correctamente las variables (entradas y salidas) que realmente afectan el desempeño y/o rendimiento de las unidades productivas sobre las cuales se les realiza el correspondiente análisis de productividad (Ng et al, 2000).

- El primer paso consiste en determinar de forma exhaustiva cada uno de los factores que realmente son relevantes en la consecución de los objetivos de la unidad productiva.
- El siguiente paso consiste en medir cada recurso elegido, para poder determinar qué grado de utilización se ha hecho en la creación del resultado en la Unidad Productiva.

Concluida esta primera parte del análisis, comenzaría la determinación de la productividad. Aunque los resultados sean varios, la productividad de una **DMU** (Decision Making Unit) es un escalar y por tanto se hace necesaria una expresión donde aparezcan todas las entradas y todas las salidas de la DMU que estén relacionadas con la productividad (Hughes, 2004). En este caso, el analista se encuentra con la dificultad de tener que agrupar en una misma expresión "recursos (entradas) y resultados (salidas)" que pueden tener distinta naturaleza y por consiguiente unidades de medida diferentes, volviendo inoperante la fórmula uno que propuso Farrel.

Para solucionar este problema aparecen los conceptos de entrada y salida virtual, es decir, la agregación de las salidas y las entradas escaladas mediante un peso ponderador para que el resultado sea adimensional y por tanto independiente de la escala utilizada.

De esta manera, la fórmula que analiza la productividad teniendo en cuenta varias entradas y varias salidas es:



$$productividad = \frac{SumaPonderadaDeSalidas}{SumaPonderadaDeEntradas} \rightarrow Pr\ oductividad = \frac{\sum_{r=1}^s u_{rj} * y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_{ij} * x_{ij}} \quad (2)$$

En donde el numerador involucra la sumatoria de las diferentes variables de Salida (**Y**) con sus respectivos pesos ponderadores (**U**) y el denominador involucra la sumatoria de las diferentes variables de Entrada (**X**) con sus respectivos pesos ponderadores (**V**).

Al utilizar la fórmula dos se obtiene un valor escalar de la Productividad de cada DMU sin preocuparse por las unidades de medida que trabaja cada variable contemplada en el modelo.

Adicional a lo anterior, se recalca que la identificación de las entradas y las salidas en la evaluación de las DMU's es una tarea tan difícil como crucial. Las entradas deben capturar todos los recursos que impacten las salidas y las salidas deben reflejar todos los resultados útiles con base a los cuales, se desea evaluar las DMU's.

En términos generales, la idea central en este tipo de estudios soportados en DEA es evaluar que tan eficientemente una DMU está manejando el proceso de transformación cuando se compara con otras DMU's que estén envueltas en el mismo proceso.

La fórmula tres representa el concepto de Eficiencia Relativa (Soto, 2010:18), en donde, cada DMU se compara con la mejor, en términos de Productividad. Esto quiere decir que aquella DMU que obtenga el valor de la unidad con dicha fórmula, está indicando que es eficiente y el resto de DMU's que obtengan un valor por debajo de la unidad serán catalogadas como no eficientes.

$$Eficiencia_j = \frac{Pr\ oductividad_j}{Pr\ oductividad_o} = \frac{Salidas Virtuales_j / Entradas Virtuales_j}{Salidas Virtuales_o / Entradas Virtuales_o}$$

↓

$$Eficiencia_j = \frac{\sum_{r=1}^s u_{rj} * y_{rj} / \sum_{i=1}^m v_{ij} * x_{ij}}{\sum_{r=1}^s u_{rj} * y_{rj} / \sum_{i=1}^m v_{ij} * x_{ij}_o} \quad (3)$$



Las medidas de las Eficiencias están basadas en estimaciones sobre el grado en el que una determinada DMU podría haber alcanzado un mayor nivel de salidas para cierto nivel de sus entradas o el grado en que hubiese podido utilizar menor cantidad de entradas para un nivel dado de salidas. Con base en lo anterior, se debe poner en consideración sobre cuál de los dos grupos de variables (Entradas o Salidas) se tiene un mayor control al momento de tomar decisiones de mejoramiento y de esta forma analizar las Eficiencias Técnicas de las Entradas o de las Salidas.

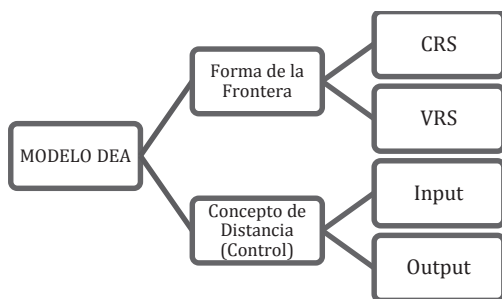
De esta manera se tiene las siguientes definiciones (Soto et al, 2010: 22):

- Eficiencia Técnica de las Entradas. Es la máxima proporción en que pueden contraerse radialmente todas las entradas de la DMU sin ocasionar deterioro (disminución) en el nivel de sus salidas.
- Eficiencia Técnica de las Salidas. Es la máxima proporción en que pueden expandirse radialmente todas las salidas de la DMU sin ocasionar deterioro en el nivel de sus entradas (aumento).

Es así como el Análisis Envolvente de Datos contiene una serie de modelos matemáticos basados en programación lineal, los cuales involucran las fórmulas de productividad y eficiencia presentadas hasta el momento, con el objetivo de optimizar los pesos de ponderación, de tal manera, que cada DMU obtenga su mejor eficiencia y se puede realizar una comparación equitativa entre todas las DMU's involucradas.

No obstante, se requiere con anterioridad definir el grupo de variables (Entradas o Salidas) que se puede controlar y el tipo de frontera que se va a manejar. La figura 1 resume estos parámetros.

**Figura 1.** Parámetros iniciales para elegir el modelo DEA

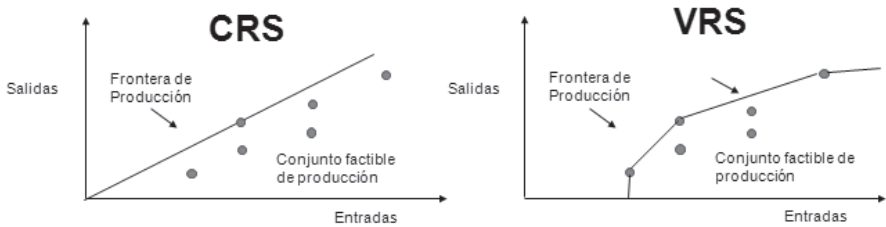


**Fuente.** Elaboración autores.

Cuando la frontera es CRS (Constant Return Scale) indica que las DMU's evaluadas podrán alcanzar la productividad de las eficientes independiente

de su tamaño. En cambio la frontera VRS (Variable Return Scale) indica que cada DMU se compara con aquellas de igual o similar tamaño, lo cual, es muy conveniente cuando se tienen grupos de DMU's claramente definidos por el comportamiento de sus variables de estudio. A manera de ejemplo la variable "Ventas Anuales" es diferenciable para empresas de pequeño, mediano y gran tamaño, por lo que, es apropiado aplicar modelos VRS que permitan una comparación justa por subgrupos. La gráfica 1 presenta un paralelo entre los dos tipos de frontera mencionados.

**Gráfica 1.** Fronteras de Eficiencia.



**Fuente.** Adaptado de Cooper, W., Seiford, L., Tone, K. (2007).

Con base al concepto de frontera (CRS o VRS) y al control (Inputs o Outputs), se tienen diferentes modelos DEA para ser implementados. Entre los más aplicados están los modelos CCR-I, CCR-O, BCC-I y BCC-O (Angulo, 2004). Los dos primeros fueron desarrollados por Charnes, Cooper y Rhodes en 1978, los cuales operan bajo escala de retorno constante (CRS) y los dos últimos fueron desarrollados por Banker, Charnes y Cooper en 1984, los cuales operan bajo escala de retorno variable (VRS).

El cuadro 1 presenta la diferencia matemática en sus modelos de programación lineal.

**Cuadro 1.** Modelos de Programación Lineal

CCR-I	BCC-I
$\begin{aligned} &Min_{\theta} \\ &sujeito: \\ &\theta x_0 - X\lambda \geq 0 \\ &Y\lambda \geq y_0 \\ &\lambda \geq 0 \\ &\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^T \end{aligned}$	$\begin{aligned} &Min_{\theta, \lambda} \theta_B \\ &sujeito_a: \\ &\theta_B x_0 - X\lambda \geq 0 \\ &Y\lambda \geq y_0 \\ &\lambda \geq 0 \\ &\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^T \end{aligned}$
	<p>NO → <math>e\lambda = 1</math></p>

**Fuente.** Tomado de Soto, J. y Arenas, W. (2010: 127).



Cabe aclarar que un modelo CCR-I o BCC-I está indicando que es orientado a los Inputs, es decir, que se tiene un mayor control sobre las variables de entrada y por ende serán las que se deben contraer al momento de querer ubicar una DMU en la frontera de Eficiencia. En cambio, un modelo CCR-O o BCC-O está orientado a los Outputs y se debe modificar sus salidas para lograr la Eficiencia ideal (Londoño et al, 2009).

El otro modelo matemático que se utilizó en esta investigación es el "Assurance Region Global" con escala Variable "ARG-I-V", el cual, tiene la siguiente configuración:

$$\max z = \mu y_0 - \mu_0$$

Sujeto a:

$$vx_0 = 1$$

$$-vX + \mu Y - \mu_0 e \leq 0$$

$$LI_1 \leq \frac{v_1 x_1}{vX} \leq LS_1$$

Con este modelo de optimización, se encontrará para cada DMU (Producto) los valores de los pesos de ponderación con la restricción de que deberán estar dentro de los límites que se fijen para cada una de las variables virtuales, evitando así, la aparición de "Ceros" en la solución final.

## Metodología Implementada

La investigación realizada fue de tipo Descriptiva y Propositiva, en donde, se caracterizó la situación actual de cada una de la unidades económicas (productos) en lo que refiere a sus productividades y eficiencias técnicas. Para ello, se aplicó la herramienta de Investigación de Operaciones no Paramétrica conocida como DEA (Data Envelopment Analysis).

El proyecto se compone de tres etapas, las cuales se describen a continuación:

### Etapa 1.

En ésta, el principal objetivo fue determinar aquellas variables relevantes de entrada, que tienen que ver con el consumo de recursos por parte de cada una de las unidades económicas e igualmente determinar las variables relevantes de salida que impactan sobre los resultados que se obtiene de cada una de dichas unidades económicas.

Para la elección de dichas variables, se realizó en primera instancia una revisión de los procesos de fabricación de sus principales productos. Esto se hizo tomando como referencia los flujogramas de los procesos productivos y la filmación de ciertos momentos relevantes de producción. Una vez





identificadas y establecidas las variables relevantes (Entrada y Salida) para este estudio, se pasó a elegir la unidad de medida de cada una.

Cabe anotar, que la cantidad de variables que se consideró en el modelo DEA estuvo acorde a la regla propuesta por Cooper, Seiford and Tone, la cual es:

$$n \geq \max(I*O, 3(I+O)) \quad (4)$$

Donde,

n: Número de DMU's

I: Inputs (Variables de entrada)

O: Outputs (Variables de salida)

Como solo se cuenta con 11 productos (DMU's) para aplicar el modelo DEA, se trabajó finalmente con tres variables (Dos de entrada y una de salida). Con esto se cumple lo dispuesto en la fórmula 4, puesto que para dicha configuración exige un valor mínimo de nueve DMU's, de lo contrario, la técnica tendría poca discriminación en los modelos DEA aplicados.

La siguiente tabla 1 presenta el listado de productos y la correspondiente información de las variables elegidas:

**Tabla 1.** Datos para el modelo DEA

DMU	(I)Operarios	(I)Tiempo Total (Horas)	(O)Unidades Producidas (Kilogramos)
Bolsa de leche	2	8	14851
Yogurt	5	14	6000
Quesito	15	8	5615,9
Cuajada	15	3	4568
Queso	14	4	5450
Queso crema	6	6	508
Kumis	3	8,5	1740
Crema de leche	2	3,75	500
Mantequilla	3	3,5	18
Lechita	2	4	400
Saborizada	5	16,5	6000

La columna "DMU" lista los 11 productos que se seleccionaron finalmente para el estudio, sin ninguna presentación en particular, sino, de manera generalizada. Las siguientes columnas presentan las dos variables de entrada y la de salida.



A continuación se da una breve explicación de cada una de las variables elegidas para el estudio realizado:

**Variables de Entrada (Inputs):** Están ubicadas en la segunda y tercera columna de la tabla 1 y están representadas por la vocal *i* en mayúscula (I), lo cual, se utiliza para que el programa "DEA-Solver" las reconozca como Input, éstas son:

*Operarios:* Indica la cantidad de operarios que son requeridos para los procesos manuales (Transporte, Inspección, Empaque, entre otros) en cada fabricación de cada producto.

*Tiempo Total:* Es el tiempo en horas que se demora cada producto en todo su proceso productivo.

**Variables de Salida (Outputs):** Es la última columna y está representadas por la vocal *o* en mayúscula (O), lo cual, se utiliza para que el programa de DEA-Solver la reconozca como Output, su significado es:

*Unidades Producidas:* Presenta el total de producto fabricado con base a los recursos consumidos con las dos variables de entrada (Operarios y Tiempo Total). Su unidad de medida está en kilogramos.

## Etapa 2.

Luego de tener la información depurada de las variables de entrada y salida (presentadas en la tabla 1), se pasó a implementar una serie de modelos DEA teniendo en cuenta los conceptos de frontera y control que se citaron en la figura 1. Luego fueron sometidos a unos análisis de sensibilidad soportados en sus pesos de ponderación para determinar cuáles presentaban un mejor ajuste a la realidad de la empresa. Con base en ello, se implementaron en su orden los modelos: CCR-I, BCC-I y ARG-I-V; mediante el software DEA-Solver Pro 9.0.

Al analizar el comportamiento de las DMU's, se realizó los siguientes cuestionamientos:

- ¿Cuáles son las unidades económicas eficientes?
- ¿En qué porcentaje de eficiencia técnica se encuentran las unidades económicas no eficientes?
- ¿Cuáles son las unidades referentes para las no eficientes?
- ¿Cuál debe ser la proyección de las unidades no eficientes para que alcancen la frontera de eficiencia?
- ¿Cómo es el comportamiento de los pesos óptimos ponderativos de cada unidad económica?



### Etapa 3.

Una vez analizados, depurados y consolidados los resultados obtenidos en la etapa anterior, se elaboró un resumen integrador de las soluciones encontradas, permitiendo de esta manera que la empresa pudiera fijar un plan de acción a seguir para mejorar la productividad y eficiencia de aquellas unidades económicas que no alcanzaron la frontera de eficiencia.

### Análisis de resultados

Con el conjunto de variables presentadas en la tabla 1 (Operarios, Tiempo Total y Unidades Producidas) se aplicó en primera instancia el modelo CCR-I, con el cual, se analizó todos los productos en un solo grupo (asumiendo un comportamiento homogéneo por parte de ellos). Cabe aclarar que es un modelo "Input", debido a que las variables de control son las de entrada (Operarios y Tiempo Total), sobre las cuales, se enfocará el plan de mejoramiento para las DMU's que resulten ineficientes.

**Tabla 2.** Eficiencias con el modelo CCR-I

Rank	DMU	Score/ Eficiencia
1	Bolsa de leche	1,0000
2	Cuajada	0,8202
3	Queso	0,7340
4	Quesito	0,3781
5	Yogurt	0,2309
6	Saborizada	0,1959
7	Kumis	0,1103
8	Crema de leche	0,0718
9	Lechita	0,0539
10	Queso crema	0,0456
11	Mantequilla	0,0028

La tabla 2 presenta el resultado de las eficiencias de los productos basados en el CCR-I, en donde, se puede observar que tan solo la DMU "Leche" es eficiente (Score de 1) y el resto de DMU's presentan un "Score o Eficiencia" por debajo de la unidad, lo que indica que deben ser sujetas a mejoras para alcanzar la frontera de eficiencia (Score igual a uno).

Para efectos de confiabilidad en los resultados presentados en la tabla 2, es importante evaluar el comportamiento de los pesos de ponderación que el modelo CCR-I utilizó en su proceso de optimización para la consecución de las variables virtuales (variables originales multiplicadas por un valor de



ponderación optimizado) y seguidamente sus correspondientes eficiencias. Los valores presentados en la tabla 3 indican que la variable "Operarios" tiene un comportamiento ineficiente crítico debido a que en diez de los once productos analizados su valor de ponderación es "cero".

**Tabla 3.** Valores de los pesos ponderadores optimizados con el CCR-I

DMU	Score/ Eficiencia	V(1) Operarios	V(2) Tiempo Total	U(1) Unidades Producidas
Bolsa de leche	1,0000	0,50000	0,00000	0,00007
Cuajada	0,8202	0,00000	0,33333	0,00018
Queso	0,7340	0,00000	0,25000	0,00013
Quesito	0,3781	0,00000	0,12500	0,00007
Yogurt	0,2309	0,00000	0,07143	0,00004
Saborizada	0,1959	0,00000	0,06061	0,00003
Kumis	0,1103	0,00000	0,11765	0,00006
Crema de leche	0,0718	0,00000	0,26667	0,00014
Lechita	0,0539	0,00000	0,25000	0,00013
Queso crema	0,0456	0,00000	0,16667	0,00009
Mantequilla	0,0028	0,00000	0,28571	0,00015

Lo anterior, sugiere que se debe realizar un ajuste en la cantidad de operarios asignados a la elaboración de cada producto programando menos cantidad de personal en cada proceso productivo.

Además, la presencia de "ceros" está indicando también que las eficiencias presentadas en la tabla 1 fueron halladas sin contemplar todas las variables de estudio (para este caso la variable "Operarios"), por lo que, no sería confiable implementar un plan de mejoramiento soportado en este modelo CCR-I.

Por tal motivo, luego de analizar lo sucedido con este modelo, se pasó a ejecutar un modelo de escala de retorno variable (Modelo BCC-I). Esto bajo la premisa de que el hecho del producto ser líquido o sólido, puede generar una segmentación significativa en los datos de las variables de estudio, sobre todo, en la cantidad de operarios asignados. El modelo BCC-I permite que se realice una segmentación interna logrando así, que cada producto se compare con sus pares más homogéneos, disminuyendo de esta manera, la posibilidad de que se vuelvan "Cero" los valores ponderadores de las variables virtuales.

En la tabla 4 se presentan las nuevas eficiencias de los productos en cuestión, en donde, se puede observar que tan solo el 45,5% de los productos alcanzaron la frontera de eficiencia.

**Tabla 4.** Eficiencias con el modelo BCC-I

Rank	DMU	Score/ Eficiencia
1	Lechita	1,0000
1	Leche	1,0000
1	Mantequilla	1,0000
1	Crema de leche	1,0000
1	Cuajada	1,0000
6	Queso	0,9036
7	Kumis	0,6667
8	Queso crema	0,5910
9	Quesito	0,5427
10	Saborizada	0,4000
10	Yogurt	0,4000

Al observar en la tabla 5 los pesos ponderados que optimiza este modelo BCC-I, se sigue manteniendo la presencia de "Ceros", ya no solo en la variable "Operarios", sino, también en las otras dos variables de estudio. Es por tal motivo, que se debe recurrir a la implementación de modelos especiales con múltiples restricciones con los que se pretende la minimización o anulación de "Ceros" en estos ponderadores.

**Tabla 5.** Valores de los pesos ponderadores optimizados con el BCC-I

DMU	Score/ Eficiencia	V(1) Operarios	V(2) Tiempo Total	U(1) Unidades Producidas
Bolsa de leche	1,0000	0,50000	0,00000	0,00007
Cuajada	1,0000	0,00000	0,33333	0,00016
Crema de leche	1,0000	0,03712	0,24687	0,00007
Mantequilla	1,0000	0,03420	0,25640	0,00006
Lechita	1,0000	0,50000	0,00000	0,00000
Queso	0,9036	0,02463	0,16380	0,00005
Kumis	0,6667	0,33333	0,00000	0,00000
Queso crema	0,5910	0,01962	0,14705	0,00004
Quesito	0,5427	0,01466	0,09751	0,00003
Yogurt	0,4000	0,20000	0,00000	0,00000
Saborizada	0,4000	0,20000	0,00000	0,00000

Uno de los objetivos principales de esta investigación era poder trabajar con un modelo que determinará las eficiencias de estos productos contemplando todas las variables sin excepción. De esta manera, se probaron



diferentes modelos DEA que generan ciertas restricciones en el proceso de optimización, evitando en la medida de lo posible la aparición de "Ceros" en los pesos ponderados. Entre ellos se encuentran: *Assurance Region* con escala constante y variable, *Assurance Region Global* también con escala constante y variable y *Bounded Variable Model*.

Luego de evaluar la pertinencia de estos modelos para el caso de estudio, se eligió el modelo "Assurance Region Global" con escala Variable "**ARG-I-V**", en el que se propuso unos límites en el comportamiento de las variables virtuales (variables multiplicadas por su ponderador optimizado), para buscar que el modelo no elimine los ponderadores (Valor de Cero), dada las ineficiencias presentadas a causa de los valores actuales de las variables.

Las razones que motivaron la elección del modelo "**ARG-I-V**" fueron:

- Éste restringe los pesos relativos a los límites designados que son comunes a todas las DMU's (Cooper et al, 2007: 186). Esta alternativa de ponderación permite realizar una elección de la relación de los pesos de manera más intuitiva que el modelo "Assurance Region".
- No se limita la solución del modelo optimizado, en lo que respecta a la contracción o expansión de las variables de estudio, tal como lo hace el "Bounded Variable Model".
- No genera una variabilidad en el comportamiento de los pesos optimizados a causa del tamaño de las variables de estudio, tal como ocurre con el "Assurance Region".

Luego de realizar un consenso entre la empresa y la academia respecto al nivel de importancia de las variables de estudio, los límites para aplicar "**ARG-I-V**", quedaron fijados así:

**Tabla 6.** Límites para las variables virtuales

Límite Inferior	Variable Virtual	Límite Superior
0,4	(I)OPERARIOS	0,6
0,1	(I)TIEMPO TOTAL	0,4

Los datos de la tabla 6 significan lo siguiente:

La variable "Operarios" al ser convertida en una variable virtual (es decir, al multiplicarla por el peso ponderador optimizado), tendrá una participación sobre la suma total de las variables virtuales que sólo puede variar entre 0.4 y 0.6. De igual manera, la variable "Tiempo Total" tendrá una participación entre 0.1 y 0.4. Esto se soporta en la razón argumentada por las directivas de la Empresa, en donde, sus Operarios es uno de los factores más importantes



para ellos y no están interesados en retirar personal en pro de mejorar su productividad.

En la tabla 7 se presenta el resumen de los productos con sus eficiencias y pesos ponderados, que se obtuvieron al aplicar el modelo "Assurance Region Global con escala Variable y control sobre las entradas" - **ARG-I-V**.

**Tabla 7.** Eficiencias y pesos del modelo ARG-I-V

DMU	Score/ Eficiencia	V(1) Operarios	V(2) Tiempo Total	U(1) Unidades Producidas
Bolsa de leche	1,000000	0,300000	0,050000	0,000067
Crema de leche	1,000000	0,300000	0,106667	0,000032
Lechita	0,974990	0,300000	0,100000	0,000002
Mantequilla	0,828563	0,200000	0,114286	0,000001
Cuajada	0,740624	0,040000	0,133333	0,000039
Queso	0,607302	0,042857	0,100000	0,000030
Kumis	0,593746	0,200000	0,047059	0,000014
Queso crema	0,450154	0,100000	0,066667	0,000020
Yogurt	0,393677	0,120000	0,028571	0,000008
Saborizada	0,370392	0,120000	0,024242	0,000007
Quesito	0,343250	0,040000	0,050000	0,000015

En este nuevo escenario, se puede observar que tan solo se mantienen eficientes la Bolsa de Leche y la Crema de Leche, los demás productos expresan una necesidad de mejora en sus variables. Además, las eficiencias encontradas con este modelo "**ARG-I-V**" brindan una mayor confianza, dado que, los pesos ponderativos las tres variables dieron diferente de cero para todos los productos, garantizando así, la inclusión de todas las variables en los cálculos de eficiencias respectivos.

Adicional a lo presentado hasta el momento, se pensó en segmentar la base de datos por productos sólidos y líquidos para analizar el impacto de las variables de estudio en cada grupo, pero se encontró la restricción de tener tan solo cinco productos sólidos y seis líquidos, y según lo citado con la fórmula cuatro, se necesitan mínimo nueve DMU's para que el modelo presente una buena discriminación de los datos.

Así que, los resultados obtenidos con el modelo "**ARG-I-V**" fueron los elegidos para presentar el plan de mejoramiento en la organización. Entre las principales razones que se tuvieron en cuenta para su elección final están: El hecho de que se logró evitar la aparición de ceros en los pesos ponderadores y al trabajar bajo escala de retorno variable permitió el mejoramiento en las



eficiencias de todos los productos respecto a los resultados emitidos por los dos modelos que lo antecedieron (CCR-I y BCC-I).

### Plan de acción con base a los resultados obtenidos con DEA

La información de la tabla 8 presenta el resumen del modelo ARG-I-V, en lo que respecta a las proyecciones de las variables para que cada producto alcance la frontera de eficiencia, es decir, para que mejore su eficiencia actual.

En la columna "Data" se observan los datos originales que manejan las variables de estudio actualmente, en la columna "Projection" se indica el valor que debería tomar cada variable de entrada para que los productos alcancen la Frontera de Eficiencia y en la columna "% Variation" se indica el equivalente de la reducción porcentual que deberían tomar dichas variables de entrada.

Por ejemplo, el producto "Quesito" es el que tiene la eficiencia más baja con un valor de **0,343**, lo cual, indica que en su proceso de producción debe pasar de utilizar 15 operarios a tan solo 5 y debe reducir su tiempo total de operación de 8 horas a 2,7. Dicho cambio en las dos variables de entrada sugiere una disminución porcentual del 70%, tal valor se da precisamente porque su eficiencia fue muy baja. Así, sucesivamente se puede observar las reducciones que deben realizarse en el resto de productos que obtuvieron su eficiencia menor a la unidad.

**Tabla 8.** Proyecciones del modelo ARG-I-V

DMU	Data	Projection	% Variation
<b>Leche</b>	<b>1,0</b>		
Operarios	2,0	2,0	0,0
Tiempo total	8,0	8,0	0,0
Unidades producidas	14851,0	14851,0	0,0
<b>Yogurt</b>	<b>0,394</b>		
Operarios	5,0	2,0	-0,6
Tiempo total	14,0	5,5	-0,6
Unidades producidas	6000,0	6000,0	0,0
<b>Quesito</b>	<b>0,343</b>		
Operarios	15,0	5,0	-0,7
Tiempo total	8,0	2,7	-0,7
Unidades producidas	5615,9	5615,9	0,0
<b>Cuajada</b>	<b>0,741</b>		
Operarios	15,0	11,1	-0,3
Tiempo total	3,0	2,2	-0,3
Unidades producidas	4568,0	4568,0	0,0





DMU	Data	Projection	% Variation
<b>Queso</b>	<b>0,607</b>		
Operarios	14,0	8,5	-0,4
Tiempo total	4,0	2,4	-0,4
Unidades producidas	5450,0	5450,0	0,0
<b>Queso crema</b>	<b>0,450</b>		
Operarios	6,0	2,7	-0,6
Tiempo total	6,0	2,7	-0,6
Unidades producidas	508,0	508,0	0,0
<b>Kumis</b>	<b>0,594</b>		
Operarios	3,0	1,8	-0,4
Tiempo total	8,5	5,0	-0,4
Unidades producidas	1740,0	1740,0	0,0
<b>Crema de leche</b>	<b>1,0</b>		
Operarios	2,0	2,0	0,0
Tiempo total	3,8	3,8	0,0
Unidades producidas	500,0	500,0	0,0
<b>Mantequilla</b>	<b>0,829</b>		
Operarios	3,0	2,5	-0,17
Tiempo total	3,5	2,9	-0,17
Unidades producidas	18,0	18,0	0,0
<b>Lechita</b>	<b>0,975</b>		
Operarios	2,0	1,9	-0,01
Tiempo total	4,0	3,9	-0,01
Unidades producidas	400,0	400,0	0,0
<b>Saborizada</b>	<b>0,370</b>		
Operarios	5,0	1,9	-0,6
Tiempo total	16,5	6,1	-0,6
Unidades producidas	6000,0	6000,0	0,0

Cabe aclarar que las reducciones sugeridas en Operarios y en Tiempo Total, deben ser tomadas como una meta y deberán ser logradas bajo un soporte metodológico apoyado en herramientas técnicas como “Métodos y Tiempo”, con lo cual, se podrá eliminar mudas en cada proceso productivo y así, ir alcanzando paulatinamente las metas sugeridas por DEA.

### Reflexiones finales y conclusiones

Dado que en la actualidad la técnica DEA “Data Envelopment Analysis” presenta una gran variedad de modelos con restricciones especiales para



diferentes escenarios, es preciso que el investigador se tome el tiempo de aplicar varios modelos y validar cuál es el que se ajusta mejor a la realidad de sus variables y genera datos más confiables para el establecimiento del curso a seguir.

Es importante que el analista contemple el comportamiento de los pesos de ponderación que el modelo genera para el cálculo de la eficiencia soportado en las nuevas variables virtuales ( $V_x$ ,  $U_y$ ), puesto que además de servir para la identificación de variables ineficientes, permite también validar si el modelo DEA aplicado es confiable y se ajusta a la realidad de los datos. Lo anterior, debido a que la aparición de ceros en dichos pesos ocasiona automáticamente la eliminación de la variable original que lo acompaña, provocando una eficiencia parcial de la DMU en cuestión puesto que no incluiría en su operación matemática todas las variables de estudio.

Cuando se cuenta con una cantidad limitada de DMU's (tal como sucedió en esta investigación) se debe tener cuidado con la cantidad de variables que se van a introducir en el modelo, puesto que un exceso en dicha cantidad provoca inmediatamente la pérdida de discriminación del modelo y se presentará como resultado una cantidad de DMU's eficientes cuando en realidad no lo son.

La técnica DEA es ideal para ser aplicada en todo proyecto en su fase de diagnóstico y/o identificación de problemas, puesto que, los resultados que se obtienen con cualquiera de sus modelos, sugiere las metas a cumplir en reducción o expansión de las variables de estudio y a partir de ello, se establece el plan de mejoramiento a seguir.



## Referencias Bibliográficas

- ANGULO, Lidia, BIONDI, Luis, CORREA, Carlos y COELHO, Pedro. (2004) "FSDA, Free Software for Decision Analysis (SLAD Software Livre de Apoio a Deciso) A Software Package for Data Envelopment Analysis Models". Congreso Latino-Iberoamericano de Investigación de Operaciones y sistemas. La Habana: Universidad de la Habana.
- BANKER, Rajiv, CHARNES, Abraham and COOPER, William. (1984). Some models for estimating technical and scale efficiencies in data envelopment analysis. *Management Science*, vol. 30. 1078-1092. Maryland: Informs.
- CHARNES, Abraham, COOPER, William and RHODES, Edwardo. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operation Research* 2, 429-444. Poznan: Elsevier.
- COELLI, Tim, PRASADA, Rao, O'DONNELL, Christopher and BATTESE, George. (2005). *An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis*, 2<sup>o</sup> edition, New York: Springer.
- COOPER, William, SEIFORD, Lawrence and TONE, Kaoru. (2007). *Data Envelopment Analysis: A comprehensive text with models, applications, references and DEA-Solver Software*. New York: Springer.
- COOPER, William, SEIFORD, Lawrence and TONE, Kaoru. (2006). *Introduction to Data Envelopment Analysis and Its Uses: With DEA Solver Software and References*. New York: Springer.
- GUZMAN, Isidoro, HURTADO, Aydee y RAMOS, Carmen. (2013). *Análisis de Eficiencia por Programas en el Sector de la Economía Social: El Caso del Principado de Asturias*. *Revesco* N° 110 - Primer Cuatrimestre 2013. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.
- HUGHES, Andrew and YAISAWARNG, Suthathip. (2004): "Sensitivity and dimensionality tests of DEA efficiency scores". *European Journal of Operational Research*, N° 154, pp. 410-422. Poznan: Elsevier.
- LONDOÑO, Liz y SIERRA, Yudy (2009). *Análisis Envolvente de Datos -DEA-: Una Aplicación al Sector de Telecomunicaciones de Países de Medianos Ingresos*. *Ecos de Economía*, N° 28, 53-73. Medellín: Universidad EAFIT.
- LÓPEZ, Juan, FERNÁNDEZ, Sergio, MORALES, Marcela. (2007). *Aplicación de la Técnica DEA (Data Envelopment Analysis) en la Determinación de Eficiencia de Centros de Costos de Producción*. *Scientia et Technica* Año XIII, N° 37, 395-400. Pereira: Universidad Tecnológica de Pereira.
- NG, Ying chu and LI, Sung. (2000): "Measuring the research performance of Chinese higher education institutions: an application of data envelopment analysis", *Education Economics*, Vol. 8, issue 2, pp. 139-156. New York: Taylor & Francis.
- SOTO, José y ARENAS, Wilson. (2010). *Análisis Envolvente de Datos: De la teoría a la práctica*. Pereira: Universidad Tecnológica de Pereira.