

# SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE SENO GORDON POR EL MÉTODO GENERALIZADO DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Francis Segovia Chaves<sup>1</sup>, Yohan Mauricio Oviedo<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Ph. D (c) en física. Profesor de la Facultad de Ciencias Exactas-Programa de Física. Grupo de Física Teórica, correo electrónico: francis.segoviac@gmail.com

<sup>2</sup>Estudiante Programa de Física, correo electrónico: mauricio.nitti@gmail.com

<sup>1,2</sup> Universidad Surcolombiana, carrera 3 No.1-31 vía Las Termitas, La Plata, Huila, Colombia.

## RESUMEN

La ecuación de seno Gordon (sG) es una ecuación diferencial parcial hiperbólica que involucra el operador de d'Alembert y el seno de la función desconocida. La importancia de la ecuación creció en 1970 cuando condujo a los llamados solitones kink y antikink. En el desarrollo de la teoría de solitones, las soluciones multionda se han convertido paulatinamente en un campo de estudio de la ciencia no lineal. Este tipo de soluciones de multionda puede ser obtenido mediante el método de la función  $\exp$  propuesto por He and Wu en el 2006, método utilizado en la solución de diversas clases de ecuaciones diferenciales no lineales como la ecuación KdV, mKdV y sG. En este trabajo describimos el método de la función  $\exp$  en la solución multionda de la ecuación sG, los resultados presentados son para soluciones solitónicas de un, dos y tres ondas. Elegimos el signo positivo en las soluciones y, encontramos que para valores negativos  $Z$  la amplitud de la solución es prácticamente cero, mientras para valores positivos  $Z$  es cercana a  $2\pi$ .

**Palabras clave:** Ecuación seno Gordon, métodos función  $\exp$ , soluciones multionda.

Recibido: 27 de abril de 2015.  
Received: April 27<sup>th</sup>, 2015.

Aceptado: 15 de mayo de 2015.  
Accepted: May 15<sup>th</sup>, 2015.

## SOLUTIONS OF SINE GORDON EQUATION BY GENERALIZED EXPONENTIAL FUNCTION METHODS

### ABSTRACT

*The sine Gordon equation (sG) is hyperbolic partial differential equation involving the d'Alembert operator and the sine of the unknown function. The importance of the equation grew from 1970, when led to kink and antikink solitons discovery. In the development of soliton theory, the multiwave solutions have gradually become a field of study of nonlinear science. Such multiwave solutions can be obtained by the exp function method proposed by He and Wu in 2006, the method is used in solving different classes of nonlinear differential equations such as KdV, mKdV and sGs. In this paper we describe the exp-function method in the solution of the sG equation, the results presented are for soliton solutions for single, two and three wave. We chose the positive sign in the solution and found that for negative values  $Z$  the amplitude of the solution is close to zero, while for positive values  $Z$  it is close to  $2\pi$ .*

**Keywords:** Sine Gordon equations, exp-function methods, multiwave solutions.

## 1. INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones diferenciales lineales al tomar en cuenta solamente una respuesta lineal de un sistema a una perturbación externa (ecuaciones de Newton, Maxwell, Schrödinger, etc.), son la base para describir diversos fenómenos mecánicos, electromagnéticos y cuánticos. Sin embargo, la mayoría de sistemas físicos reales son no lineales. Es más, en los modelos teóricos se hace una descripción lineal donde las no linealidades se tratan como pequeñas perturbaciones. Un claro ejemplo de sistemas lineales y no lineales, son las ondas: desde el punto de vista lineal ellas se caracterizan por la condición de amplitudes pequeñas, esto hace que su forma y velocidad sean independientes de su amplitud, la velocidad es determinada por las propiedades del medio donde se propaga y es válido el principio de superposición, donde la suma de dos ondas lineales es también una onda lineal [1]. Esto se observa en la repetición periódica espacial de elevaciones y valles sobre una superficie de agua, condensación y rarefacciones de una densidad, o desviaciones desde un valor medio de varias cantidades físicas. Caso contrario sucede con las ondas no lineales, en ellas existe una distorsión en la forma de las ondas, ondas de amplitud grande pueden ser no lineales, el principio de superposición no es válido y, sumado a ello, debe tenerse en cuenta el problema de la dispersión, Los efectos combinados de la no linealidad y dispersión dan origen a las ondas solitarias.

En física lineal tienen importancia las excitaciones, es decir, soluciones del problema que tienen una energía superior al estado fundamental de energía más baja. Así, en la aproximación lineal surgen las llamadas cuasi partículas como fonones, magnones, plasmones, polaritones, excitones, etc. Estas excitaciones son del tipo oscilador armónico. En física no lineal aparecen los llamados solitones. La transformación y movimientos de los solitones son descritos por ecuaciones no lineales de la física matemática. La historia de las ondas solitarias fue hecha por Russell en 1834 en la superficie del agua. Solamente en 1965 fueron las ondas solitarias entendidas. N. Zabusky y M. Kruskal solucionaron la ecuación de Korteweg de Vries (KdV) que modela el comportamiento de una superficie de fluido [2]. Las interesantes soluciones de estas ecuaciones las denominaron solitones. Una característica de estas excitaciones es la localización de la energía en una región finita del

espacio. Con la energía inicial se forman los solitones que interactúan entre sí, sin perder la forma y al cabo de un cierto tiempo recuperan su estado inicial [3, 4].

Las soluciones localizadas no sólo están presentes en la ecuación KdV, otro ejemplo es la ecuación diferencial no lineal hiperbólica seno Gordon (sG) [5]. La ecuación sG tiene diversas aplicaciones en un amplio rango de la física, no solamente en la teoría de campos relativistas, sino también en la física del estado sólido y óptica no lineal, entre otras. La ecuación sG fue tratada por primera vez por Backlund en 1783, pero no como una teoría de campos no lineal, sino en el campo de la geometría diferencial de las superficies de curvatura negativa constante [6]. La importancia de las soluciones de la ecuación de sG creció en 1970 cuando se encontraron soluciones del tipo solitón (llamados kink y antikink). En el 2003 utilizan la ecuación sG para describir pulsos ultracortos de pocos ciclos, en la aproximación de onda corta para un medio descrito por el Hamiltoniano de dos niveles cuando no se puede utilizar la aproximación de envolvente lentamente variable [7]. En el campo del estado sólido, entre una de las múltiples aplicaciones de la ecuación sG se encuentra en la superconductividad [8, 9]. Si se tienen dos piezas de superconductor separados por una capa delgada de aislante o conductor normal y si esta capa es suficientemente delgada los pares de Cooper superconductores pueden atravesarla mediante efecto túnel cuántico. Este dispositivo es lo que se denomina unión Josephson [10]. Si se aplica un campo magnético paralelo a la capa de separación, éste puede penetrar en la unión, pero en cantidades discretas bien definidas que se llaman cuantos de flujo o fluxones. La ecuación que describe la física de la unión Josephson es la ecuación de sG y un fluxón es un solitón.

Existen varios métodos para encontrar las soluciones de ecuaciones diferenciales no lineales, entre los que podemos destacar la transformación de Backlund, soluciones de ondas viajeras, el de similaridad, el de dispersión inversa y el método de separación de variables [11-14]. Recientemente un nuevo método fue propuesto por He y Zhang [15], el cual ha atraído la atención en la física matemática, es el denominado método de la función *exp*. Este método ha sido ampliamente utilizado por muchos autores para obtener soluciones de ondas viajeras y no viajeras, como también soluciones periódicas de ecuaciones de

onda no lineales. En este artículo estamos interesados en describir la solución de la ecuación diferencial sG por el método generalizado de la función exponencial, el cual puede utilizarse en la solución de otros tipos de ecuaciones diferenciales no lineales [16-18].

## 2. MATERIALES Y MÉTODOS

Hemos dividido el artículo esencialmente en tres partes: en la primera parte, sección 2.1, se hace una introducción a la ecuación de seno Gordon (sG). A partir de una cadena de péndulos acoplados se hace la aproximación al continuo, esto es, si el número de péndulos aumenta y la distancia de separación entre ellos disminuye, logramos deducir la ecuación sG. En la segunda parte, sección 2.2, solucionamos la ecuación sG para un caso particular, mostramos la existencia de los llamados solitones kink y antikink. En la tercera parte, sección 2.3, siguiendo el método de la función exp propuesto por S. Zhang [16], obtenemos las soluciones multionda para la ecuación sG. La eficacia del método radica en que una ecuación diferencial no lineal, puede resolverse solucionando ecuaciones lineales algebraicas mediante una transformación adecuada de la función de onda incógnita.

### 2.1 Ecuación de seno Gordon (sG) en un conjunto de péndulos acoplados

Consideremos un conjunto de  $N$  péndulos acoplados idénticos de longitud  $l$ , masa  $m$  y separados a una distancia  $d$  como se observan en la Fig.1. El ángulo de rotación de cada uno de los péndulos se describe por la variable  $\varphi$ . Imponemos la condición de que los extremos de los péndulos son fijos. La situación de energía mínima es la de todos los péndulos abajo. El modelo discreto planteado anteriormente es la versión discreta de la ecuación sG o modelo de Frenkel Kontorova. Este modelo apareció en el estudio del movimiento y estructura de dislocaciones en sólidos sometidos a deformaciones plásticas, en este caso la variable  $\varphi$  corresponde a la posición relativa del átomo respecto a la posición de equilibrio de la estructura ordenada. Pero  $\varphi$  también puede ser el ángulo de la imanación respecto al estado ordenado en un material magnético, en este caso el solitón corresponde a lo que se llama pared de dominio magnético [19].

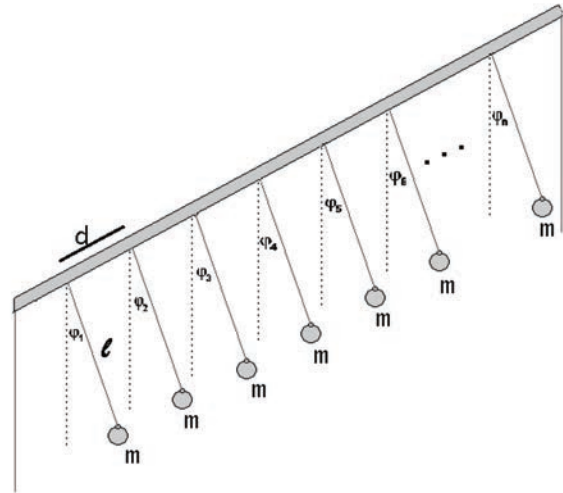


Fig.1. Representación de un conjunto de  $N$  péndulos idénticos de longitud  $l$ , masa  $m$  y separados a una distancia  $d$ .

El lagrangiano del sistema para el conjunto de péndulos acoplados viene dado por la suma de la energía cinética y potencial gravitatoria, es decir

$$L = \frac{1}{2}ml^2 \sum_{i=0}^{n+1} \dot{\varphi}_i^2 - mgl \sum_{i=0}^{n+1} (1 - \cos \varphi_i) - \frac{1}{2}K \sum_{i=0}^{n+1} (\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2 \quad (1)$$

En la ecuación (1),  $K$  es la constante de deformación y  $g$  es la aceleración de la gravedad. De acuerdo con las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} = 0, \quad (2)$$

al reemplazar en (2) el lagrangiano dado por (1), obtendremos las ecuaciones de movimiento del sistema

$$\sum_{i=0}^{n+1} \ddot{\varphi}_i = -\omega_1^2 \sum_{i=0}^{n+1} \text{Sen} \varphi_i - \omega_0^2 \sum_{i=0}^{n+1} (\varphi_i - \varphi_{i+1}) \quad (3)$$

En la ecuación (3), hemos definido las constantes

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l} \quad \text{y} \quad \omega_0^2 = \frac{K}{ml^2} \quad (4)$$

Como los extremos del sistema de péndulos son fijos, esto implica que la sumatoria va desde  $i=1$  hasta  $i=n$ . Según lo anterior, (3) puede reescribirse de la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^n \{\ddot{\varphi}_i + \omega_1^2 \text{Sen} \varphi_i + \omega_0^2 [(\varphi_i - \varphi_{i+1}) + (\varphi_{i-1} - \varphi_i)]\} = 0 \quad (5)$$

La velocidad de la onda sobre la varilla viene dada por  $\frac{\eta}{\rho l^2} \equiv v^2$ . Ahora realizamos una aproximación al continuo, esto es, al considerar que tenemos un número muy grande de  $N$  péndulos, la distancia  $d$  de separación entre ellos se hace muy pequeña. Es así que podemos aplicar:

$$(\varphi_{i+1} - \varphi_i) - (\varphi_i - \varphi_{i-1}) \approx d^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} \quad (6)$$

Al reemplazar (6) en (5), obtenemos

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + \omega_1^2 \text{Sen} \varphi = 0 \quad (7)$$

Ahora hacemos un cambio de variable para escribir (7) de forma adimensional:

$$z = \frac{\omega_1}{v} x \quad y \quad \tau = \omega_1 t \quad (8)$$

Al efectuar las primeras y segundas derivadas de (8), y reemplazar en (7) finalmente se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\text{sen} \varphi \quad (9)$$

La ecuación (9), se denomina ecuación de seno Gordon (sG), ecuación que se resolverá a continuación.

## 2.2 Primer método de solución de la ecuación sG

Supongamos una solución de onda viajera  $\varphi(\tau, Z) = u(Z - v\tau) = u(\varepsilon)$ , siendo  $v$  la velocidad del solitón. La ecuación (9), se escribe en términos de la nueva variable  $\varepsilon$ , para ello las primera derivadas vienen dadas por:

$$\frac{d}{dz} = \frac{d\varepsilon}{dz} \frac{d}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon}, \quad \frac{d}{d\tau} = \frac{d\varepsilon}{d\tau} \frac{d}{d\varepsilon} = -v \frac{d}{d\varepsilon} \quad (10)$$

Al reemplazar (10) en (9), obtenemos:

$$(1 - v^2) \frac{d^2 u}{d\varepsilon^2} = \sin u \quad (11)$$

Dividimos el resultado dado por (11), entre  $1-v^2$  y multiplicamos por  $\frac{du}{d\varepsilon}$ ,

$$\frac{d^2 u}{d\varepsilon^2} \frac{du}{d\varepsilon} - \frac{\sin u}{(1-v^2)} \frac{du}{d\varepsilon} = 0 \quad (12)$$

Es necesario tener en cuenta que  $-\frac{\sin u}{(1-v^2)} \frac{du}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} \left( \frac{\cos u}{1-v^2} \right)$ , por lo tanto (12), toma la siguiente forma:

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{du}{d\varepsilon} \right)^2 \right] + \frac{d}{d\varepsilon} \left( \frac{\cos u}{1-v^2} \right) = 0 \quad (13)$$

Integramos el resultado anterior, para obtener:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{du}{d\varepsilon} \right)^2 + \frac{\cos u}{1-v^2} = A, \quad (14)$$

siendo  $A$  una constante de integración. Resolviendo ahora para  $\frac{du}{d\varepsilon}$ , obtenemos una ecuación diferencial ordinaria de primer orden. Se resuelve fácilmente la ecuación diferencial (14),

$$\frac{du}{d\varepsilon} = \pm \sqrt{2A - \frac{2 \cos u}{1-v^2}} \quad (15)$$

Haciendo  $B = A(1 - v^2)$ , (15) se reescribe:

$$\frac{du}{d\varepsilon} = \pm \sqrt{2(B - \cos u)} \quad (16)$$

Por separación de variables se resuelve (16),

$$\int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{B - \cos u}} = \pm \sqrt{\frac{2}{1-v^2}} \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} d\varepsilon \quad (17)$$

El resultado de la ecuación (17) depende de dos parámetros; de la velocidad del solitón  $v$  y de la constante  $A$  de integración. Así, la solución estable representa ondas solitarias, ondas periódicas o funciones monótonamente crecientes de  $\varepsilon$ , dependiendo del signo y la magnitud de  $v$  y  $B$ .

Cuando  $B=1$ , una solución de onda solitaria existe para cualquier valor de la velocidad, así que  $0 < |v| < 1$ . Teniendo en cuenta la relación trigonométrica  $1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$ , la ecuación (17) se simplifica:

$$\int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{2 \sin^2 \frac{u}{2}}} = \pm \sqrt{\frac{2}{1-v^2}} \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} d\varepsilon \quad (18)$$

En definitiva, resolviendo las integrales (18) y teniendo en cuenta que  $\varphi(z, \tau) = u(\varepsilon)$ ,  $\tan\left(\frac{\varphi_0}{4}\right) = 1$  y para  $\varepsilon_0 = 0$ , concluimos que la solución de la ecuación sG es:

$$\varphi(z, \tau) = 4 \arctan \left[ \exp \left( \pm \frac{z - v\tau - x_0}{\sqrt{1-v^2}} \right) \right] \quad (19)$$

La ecuación (19), es la solución de onda solitaria para la ecuación diferencial de seno Gordon (9); representa una onda solitaria localizada viajando con una velocidad  $|v| < 1$ . El signo  $\pm$  corresponde a las soluciones localizadas que son llamadas solitón (ó kink) y antisolitón (ó antikink), respectivamente.

A continuación describiremos las soluciones multionda de la ecuación sG, siguiendo el formalismo de S. Zhang [16]. A diferencia de los resultados presentados anteriormente donde la solución es para un solitón, el método de Zhang permite obtener soluciones multionda.

### 2.3 Solución de la ecuación sG por el método generalizado de la función exponencial

Consideremos en primer lugar una transformación de la forma

$$\varphi(\tau, Z) = 4 \arctan \psi(\tau, Z) \quad (20)$$

Las segundas derivadas de (20), respecto a  $\tau$  y  $Z$  son:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} = -8 \operatorname{Sen} \left( \frac{1}{4} \varphi \right) \operatorname{Cos}^3 \left( \frac{1}{4} \varphi \right) \left( \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right)^2 + 4 \operatorname{Cos}^2 \left( \frac{1}{4} \varphi \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} \quad (21)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial Z^2} = -8 \operatorname{Sen} \left( \frac{1}{4} \varphi \right) \operatorname{Cos}^3 \left( \frac{1}{4} \varphi \right) \left( \frac{\partial \psi}{\partial Z} \right)^2 + 4 \operatorname{Cos}^2 \left( \frac{1}{4} \varphi \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} \quad (22)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\operatorname{cos}^2 \left( \frac{1}{4} \varphi \right) = \frac{1}{\psi^2 + 1} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(\varphi) = \frac{4\psi(1-\psi^2)}{(\psi^2+1)^2} \quad (23)$$

Reemplazamos en (9) las derivadas dadas por (21) y (22), junto con las relaciones dadas por (23) y obtenemos así:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} + 2\psi \left( \frac{\partial \psi}{\partial Z} \right)^2 - 2\psi \left( \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right)^2 + \psi^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} - \psi^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} + \psi - \psi^3 = 0 \quad (24)$$

La solución de (24) por el método generalizado de la función  $\exp$  permitirá obtener la solución de la ecuación sG. Para ello debe tenerse en cuenta que en general una ecuación diferencial no lineal de dos variables  $z$  y  $\tau$ , puede representarse como:

$$P(\psi, \psi_\tau, \psi_z, \psi_{\tau z}, \psi_{\tau\tau}, \psi_{zz}, \dots) = 0 \quad (25)$$

Donde  $P$  es un polinomio de  $\psi$  y sus derivadas. El método de la función  $\exp$ , se centra en obtener la

solución de  $N$  ondas asumiendo soluciones de la forma:

$$\psi(\tau, Z) = \frac{\sum_{i_N=0}^{P_N} a_{i_1 i_2 \dots i_N} e^{\sum_{g=1}^N i_g \xi_g}}{\sum_{j_N}^{q_N} b_{j_1 j_2 \dots j_N} e^{\sum_{g=1}^N j_g \xi_g}} \quad (26)$$

En la ecuación (26)  $\xi_g = k_g Z + c_g \tau + \omega_g$ , siendo  $\omega_g$  una constante;  $a_{i_1 i_2 \dots i_N}$  y  $b_{j_1 j_2 \dots j_N}$  son constantes que deben ser determinadas.

#### 2.3.1 Solución para $N=1$

Para el caso de una onda se expande (26) obteniendo una solución de (24) de la forma:

$$\psi(\tau, Z) = \frac{a_1 e^{\xi_1}}{1 + b_1 e^{\xi_1}} \quad (27)$$

Donde  $\xi_1 = k_1 Z + c_1 \tau + \omega_1$ . Efectuamos las primeras y segundas derivadas en (27):

$$\frac{\partial \psi}{\partial Z} = \frac{a_1 k_1 e^{\xi_1}}{(1 + b_1 e^{\xi_1})^2} \quad (28)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \frac{a_1 c_1 e^{\xi_1}}{(1 + b_1 e^{\xi_1})^2} \quad (29)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \frac{a_1 c_1 e^{\xi_1}}{(1 + b_1 e^{\xi_1})^2} \quad (30)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} = \frac{a_1 c_1^2 e^{\xi_1} (1 - b_1 e^{\xi_1})}{(1 + b_1 e^{\xi_1})^3} \quad (31)$$

Al reemplazar en (24) las ecuaciones desde la (27) hasta (31), obtenemos

$$\begin{aligned} & e^{\xi_1} (a_1 c_1^2 - a_1 k_1^2 - a_1) + e^{2\xi_1} (a_1 b_1 c_1^2 - a_1 b_1 k_1^2 \\ & - 4a_1 b_1) + e^{3\xi_1} (-a_1 b_1^2 c_1^2 - a_1^3 c_1^2 + a_1^3 k_1^2 - 6a_1 b_1^2) + \\ & e^{4\xi_1} (-a_1 b_1^3 c_1^2 + a_1 b_1^3 k_1^2 - a_1^3 b_1 c_1^2 + a_1^3 b_1 k_1^2 - 4a_1 b_1^3 + \\ & 2a_1^3 b_1) + e^{5\xi_1} (-a_1 b_1^4 + a_1^3 b_1^2) = 0 \quad (32) \end{aligned}$$

Igualando a cero cada uno de los coeficientes  $e^{\xi_i}$  de (32), obtendremos un sistema de ecuaciones para  $a_1, b_1, c_1$  y  $k$ , cuyas soluciones son:

$$c_1 = \pm \sqrt{k_1^2 - 1} \quad \text{y} \quad b_1 = 0 \quad (33)$$

Obtenemos así la solución de la ecuación diferencial (24) por el método generalizado de la función  $\exp$ . Especial interés en nuestro caso es la solución de la ecuación sG (9), ya que al tener en

cuenta los resultados dados por (33) en (27), se obtiene la solución para una onda:

$$\varphi(\tau, Z) = 4\arctan\left(a_1 e^{k_1 Z \pm \sqrt{k_1^2 - 1}\tau + \omega_1}\right) \quad (34)$$

### 2.3.2 Solución para $N=2$

Siguiendo el mismo procedimiento para una onda, en el caso de  $N=2$ , expandimos (26):

$$\psi(\tau, Z) = \frac{a_{10}e^{\xi_1} + a_{01}e^{\xi_2}}{1 + b_{11}e^{\xi_1 + \xi_2}} \quad (35)$$

En la ecuación (35), los coeficientes  $\xi_1$  y  $\xi_2$  vienen dados por:

$$\xi_1 = k_1 Z + c_1 \tau + \omega_1 \quad \text{y} \quad \xi_2 = k_2 Z + c_2 \tau + \omega_2 \quad (36)$$

Efectuamos las segundas derivadas de (35) y reemplazamos en (24); luego al igualar potencias obtendremos un sistema de ecuaciones con coeficientes a determinar  $b_{11}$ ,  $c_1$  y  $c_2$ . Después de efectuar las operaciones algebraicas se obtienen las siguientes soluciones:

$$c_1 = \pm \sqrt{k_1^2 - 1}, \quad c_2 = \pm \sqrt{k_2^2 - 1} \quad (37)$$

Y además,

$$b_{11} = a_{10}a_{01}M_{12} \quad (38)$$

En la ecuación (38), el coeficiente  $M_{12}$  viene dado por:

$$M_{12} = \frac{(k_1 - k_2)^2 - (c_1 - c_2)^2}{(k_1 + k_2)^2 - (c_1 + c_2)^2} \quad (39)$$

Según lo anterior, la solución de la ecuación sG para dos ondas viene dada por:

$$4\arctan\left(\frac{\varphi(\tau, Z) = \frac{a_{10}e^{k_1 Z \pm \sqrt{k_1^2 - 1}\tau + \omega_1} + a_{01}e^{k_2 Z \pm \sqrt{k_2^2 - 1}\tau + \omega_2}}{1 + a_{10}a_{01}M_{12}e^{k_1 Z \pm \sqrt{k_1^2 - 1}\tau + \omega_1 + k_2 Z \pm \sqrt{k_2^2 - 1}\tau + \omega_2}}}{(40)}\right)$$

Presentamos ahora los resultados obtenidos, para ello hacemos uso del software Mathematica.

## 3. RESULTADOS Y ANÁLISIS

A continuación se grafican las soluciones de un solitón (kink), se escoge la solución con signo positivo de (19):

$$\varphi(\tau, Z) = 4\arctan\left[\exp\left(\frac{Z - v\tau - x_0}{\sqrt{1 - v^2}}\right)\right] \quad (41)$$

En la Fig. 1. se muestran las tres soluciones para el caso en que la que la velocidad del solitón es  $v=0.8$

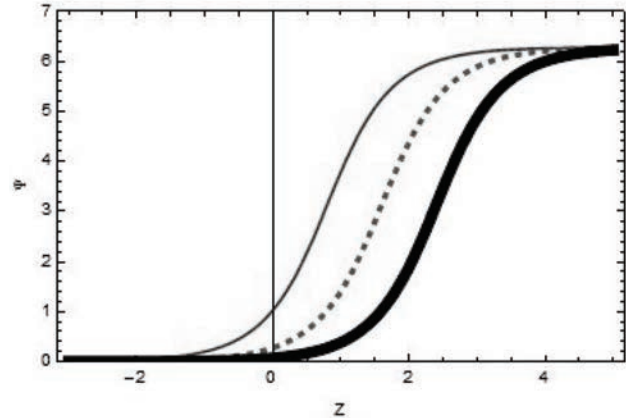


Fig. 1. Solución solitónica (41) para una velocidad de  $v=0.8$ . La curva continua gruesa corresponde a un tiempo de  $t=3$ , la curva a trazos discontinua para  $t=2$  y la curva a continua delgada para  $t=1$ .

Estas soluciones han sido llamadas kink puesto que representan un giro (anti horario) en la variable  $\varphi(\tau, Z)$ , la cual toma al sistema desde de la solución  $\varphi = 0$  a una solución adyacente  $\varphi = 2\pi$ . Los estados con  $\varphi = 0$  son conocidos como estados vacíos con soluciones constantes de energías nulas. De la anterior figura se observa que el perfil es continuo con  $\varphi \rightarrow 0$  si  $Z \rightarrow -\infty$ , y  $\varphi \rightarrow 2\pi$  si  $Z \rightarrow \infty$ .

Al escoger el signo negativo de (19) se obtiene la solución antisolitón (antikink):

$$\varphi(\tau, Z) = 4\arctan\left[\exp\left(-\frac{Z - v\tau - x_0}{\sqrt{1 - v^2}}\right)\right] \quad (42)$$

En la Fig. 2. se presentan las soluciones para el caso en que la que la velocidad del antikink es  $v=0.8$ . En este tipo de soluciones se presenta un giro en sentido opuesto al de un kink. El perfil de esta solución es continuo con  $\varphi \rightarrow 2\pi$  si  $Z \rightarrow -\infty$  y  $\varphi \rightarrow 0$  si  $Z \rightarrow \infty$ . En general las soluciones de la ecuación sG kink y antikink, se denominan como solitones topológicos.

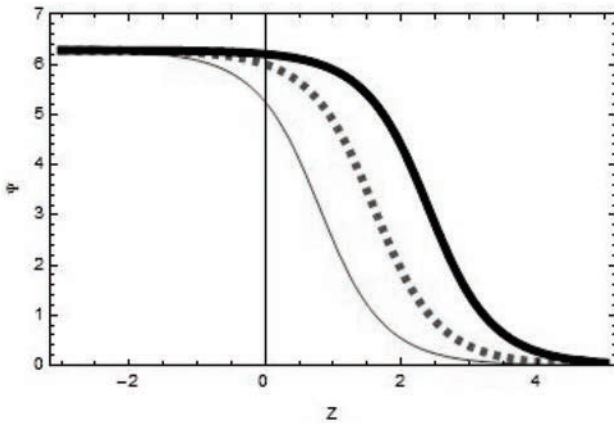


Fig. 2. Solución solitónica (42) para una velocidad de  $v=0.8$ . La curva continua gruesa corresponde a un tiempo  $t=1$ , la curva a trazos discontinuo para  $t=2$  y la curva a continua delgada para  $t=3$ .

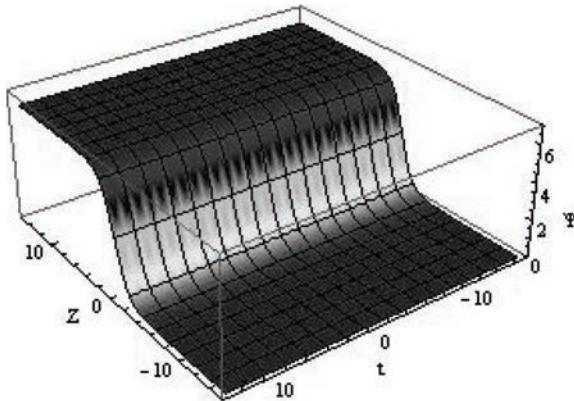


Fig. 3. Evolución espacial de la solución de la ecuación sG (34) para  $N=1$ . Se eligieron los parámetros  $a_1 = 1, k_1 = 1$  y  $\omega_1 = 0$ , [16].

Presentamos ahora los resultados obtenidos para las soluciones de la ecuación sG por el método de la función exp. A diferencia del método descrito por (41) y (42), el método de la función exp nos permite obtener soluciones de multionda para diferentes valores de  $N$ .

Para el caso de una sola onda ( $N=1$ ) escogiendo el signo positivo en la solución de la ecuación sG (34), cualitativamente se obtiene la solución de una onda solitónica kink como el descrito en la Fig.1. Lo anterior claramente se puede observar en la Fig.3.

En el caso de dos ondas ( $N=2$ ), la Fig.4. representa los perfiles de evolución de la solución de la ecuación sG (40) a medida que el tiempo aumenta.

Se observan en la Fig. 4 dos solitones kink viajando en direcciones opuestas para  $Z$ .

La interacción entre los solitones kink para diferentes tiempos y sus propiedades asintóticas en diferentes posiciones  $Z$  se representa en la Fig. 5.

Como una extensión a los resultados obtenidos por el método generalizado de la función exp, en la Fig. 6 presentamos la solución de la ecuación sG para tres ondas ( $N=3$ ). En la Fig. 6 se muestran tres solitones viajando a su encuentro en una posición y tiempo variable. Debemos tener en cuenta que si seguimos el método descrito por (26), en el caso de  $N=3$ :

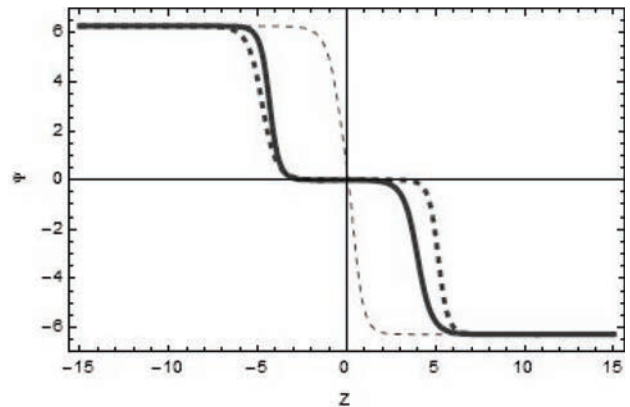


Fig. 4. Evolución de la solución de la ecuación sG (40), para  $a_{10} = -2, a_{01} = 3, k_1 = 2, k_2 = -3, \omega_1 = 0$  y  $\omega_2 = 0$ . La curva de línea continua corresponde a  $t=5$ , la curva a trazos delgados es para  $t=0$  y la curva a trazos gruesos para  $t=5$ , [16].

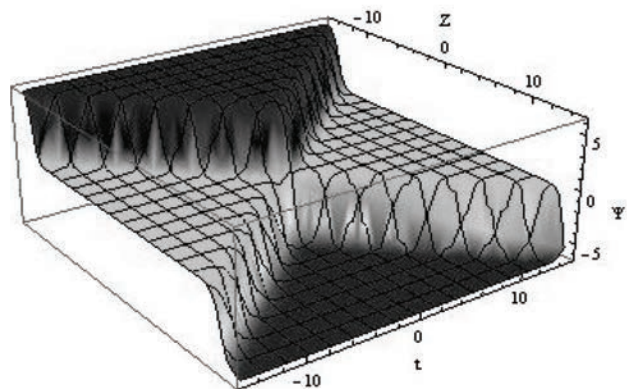


Fig. 5. Evolución espacial de la solución de dos ondas (40) para  $a_{10} = -2, a_{01} = 3, k_1 = 2, k_2 = -3, \omega_1 = 0$  y  $\omega_2 = 0$ .

$$\psi = \frac{a_{100}e^{\xi_1} + a_{010}e^{\xi_2} + a_{001}e^{\xi_3} + a_{111}e^{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3}}{1 + b_{110}e^{\xi_1 + \xi_2} + b_{101}e^{\xi_1 + \xi_3} + b_{011}e^{\xi_2 + \xi_3}} \quad (43)$$

Donde  $\xi_1 = k_1 Z + c_1 \tau + \omega_1$ ,  $\xi_2 = k_2 Z + c_2 \tau + \omega_2$  y  $\xi_3 = k_3 Z + c_3 \tau + \omega_3$ . Las constantes a determinar vienen dadas por:

$$c_1 = \pm \sqrt{k_1^2 - 1}, c_2 = \pm \sqrt{k_2^2 - 1}, c_3 = \pm \sqrt{k_3^2 - 1} \quad (44)$$

$$b_{110} = a_{100}a_{010}A_{12}, b_{101} = a_{100}a_{001}A_{13} \quad (45)$$

$$b_{101} = a_{100}a_{001}A_{13}, b_{011} = a_{010}a_{001}A_{23} \quad (46)$$

$$b_{011} = a_{010}a_{001}A_{23}, a_{111} = a_{100}a_{001}a_{010}A_{12}A_{13}A_{23} \quad (47)$$

Hemos definido:

$$A_{ij} = \frac{(k_i - k_j)^2 - (c_i - c_j)^2}{(k_i + k_j)^2 - (c_i + c_j)^2}; 1 \leq i < j \leq 3 \quad (48)$$

En definitiva, la solución de la ecuación sG para  $N=3$  es:

$$\varphi(\tau, Z) = 4 \arctan \left( \frac{a_{100}e^{\xi_1} + a_{010}e^{\xi_2} + a_{001}e^{\xi_3} + a_{111}e^{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3}}{1 + b_{110}e^{\xi_1 + \xi_2} + b_{101}e^{\xi_1 + \xi_3} + b_{011}e^{\xi_2 + \xi_3}} \right) \quad (49)$$

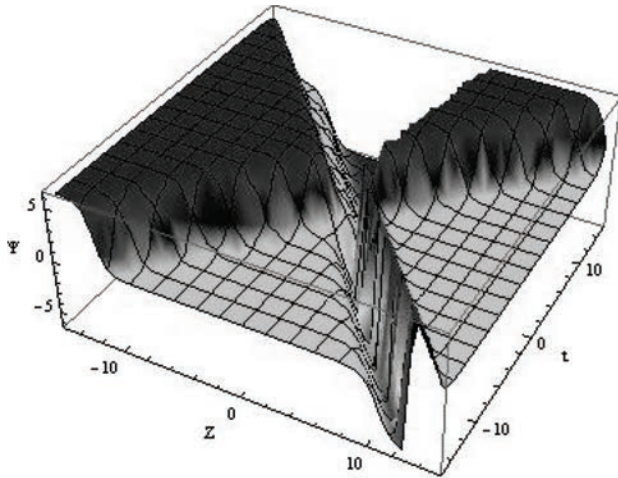


Fig. 6. Evolución espacial de la solución de tres ondas con  $a_{100} = -2, a_{010} = 5, a_{001} = -3, k_1 = 2, k_2 = -2, k_3 = \frac{3}{2}, \omega_1 = 0, \omega_2 = 0, \text{ y } \omega_3 = 0$ , [16].

#### 4. CONCLUSIÓN

En este artículo se obtuvo la solución multionda de una ecuación diferencial no lineal como es la de seno Gordon mediante el método de la función exp.

Las soluciones obtenidas fueron representadas para una, dos y tres ondas. El método propuesto es más simple y permite describir sus posibles aplicaciones en otro tipo de ecuaciones diferenciales no lineales como la ecuación KdV. Los resultados concuerdan con resultados conocidos reportados en la literatura para solitones kink y antikink.

#### 5. AGRADECIMIENTOS

Los estudios preliminares presentados en el presente trabajo fueron realizados gracias a la Universidad Surcolombiana por su apoyo en la financiación del proyecto titulado: Masas y mezclas de los neutrinos a partir de operadores autoadjuntos positivos asociados a espacios de Hilbert.

#### 6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] P.G. Drazin and R. S. Johnson. Solitons: an Introduction. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [2] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. Phys. Rev. Lett., 15, 240-243, 1965.
- [3] M. Toda, Nonlinear waves and solitons. Springer, Berlin, 1989.
- [4] Y. Kivshar and G. Agrawal, Optical solitons, Academic Press, USA, 2003.
- [5] M. Segev, Solitons: A Universal Phenomenon of Self-Trapped Wave Packets, Opt. Photonics news, 13, 27-29, 2002.
- [6] A. Scott, Nonlinear science. Emergence and dynamics of coherent structures, Oxford University Press, 1999.
- [7] M. A. Matias y J. Guemez, Stabilization of chaos by proportional pulses in the sistema variables, Phys. Rev. Lett. 72, 1455-1462, 1994.
- [8] E. Trias, J. J. Mazo and T.P. Orlando, Discrete breathers in nonlinear lattices: Experimental detection in a Josephson-junction array, Phys. Rev. Lett. 84, 741-744, 2000.



- [9] P. Binder, Observation of breathers in Josephson Ladders, *Phys. Rev. Lett.* 84, 745, 2000.
- [10] C. Pooles, H. Farach and R. Creswick, Superconductivity, Academic Press, Columbia, 1995.
- [11] W. J. Pierson, M. A. Donelan and W. H. Hui, Linear and nonlinear propagation of water wave groups, *J. Geophys. Oceans*, 97, 5607-5621, 1992.
- [12] C. S. Gardner, J. M. Green, M. D. Kruskal and R. Miura, Methods for solving the Korteweg de Vries equation, *Phys. Rev. Lett.* 19, 1095-1097, 1967.
- [13] S. P. Bursteven, V. E. Zakharov and A. V. Mikhailov, The inverse scattering methods with variable spectral parameter, *Theor. Math. Phys.* 70, 232-241, 1987.
- [14] R. K. Dodd and R. K. Bullough, Polynomial conserved densities for the sine Gordon equation, *Proc. R. Soc. Lond. A* 352, 481-503, 1977.
- [15] J. He and L. Zhang, Generalized solitary solution and compacton-like solution of the Jaulent–Miodek equations using the Exp-function method, *Phys. Lett. A* 372, 1044, 2008.
- [16] S. Zhang, J. Wang, A. Peng and B. Cai, A generalized exp-function method for multiwave solutions of sine Gordon equation, *J. Phys. Pramana*, 81, 763-773, 2013.
- [17] S. Zhang, W. Wang and J. Tong, The Exp-Function Method for the Riccati Equation and Exact Solutions of Dispersive Long Wave Equations, *Z. Naturforsch.* 63, 663 – 670, 2008.
- [18] A. Ebaid, Application of the exp function method for solving some evolution equations with nonlinear terms any orders, *Z. Naturforsch.* 65, 1039-1044, 2010.
- [19] J. Saletan, Classical dynamics a contemporary approach, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.