

DISEÑO DE CONTROLADORES BASADOS EN TÉCNICAS DE CONTROL ÓPTIMO LQR+i Y H_2 PARA UN PROTOTIPO DEL PÉNDULO INVERTIDO SOBRE RUEDAS

Camilo Andrés Ávila Ramos¹, Fredy Alexander Suarez Cardenas²

¹ Camilo Andrés Ávila Ramos, Estudiante Ingeniería Electrónica Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, camilo.avila@uptc.edu.co.

² Fredy Alexander Suarez Cárdenas, Estudiante Ingeniería Electrónica Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, fredy.suarez@uptc.edu.co. Calle 4a sur No 15-134, Sogamoso, Colombia.

RESUMEN

Este documento presenta el diseño de dos controladores en simultáneo que logran mantener en equilibrio el sistema denominado péndulo invertido sobre ruedas, el controlador H_2 basado en LMIs y el controlador LQR+i. Se programa la ley de control diseñada en Matlab con el objetivo de lograr una respuesta que estabilice el péndulo en la posición vertical. Los resultados presentados se logran a través de la estimación de las señales en tiempo continuo y discreto del sistema y tienen un comportamiento esperado en el tiempo.

Para evaluar el funcionamiento de los controladores se realizan las simulaciones en continuo y discreto en Simulink, posteriormente se ilustra su desempeño, donde se realiza la comparación y análisis de su comportamiento

Palabras clave: Controlador LQR+i, Controlador H_2 , LMI.

Recibido: 17 de noviembre, 2012.
Received: November 17th, 2012.

Aceptado: 13 de diciembre, 2012.
Accepted: December 13th, 2012.

CONTROLLERS DESIGN BASED ON OPTIMAL CONTROL TECHNIQUES LQR+I AND H_2 PROTOTYPES FOR INVERTED PENDULUM ON WHEELS

ABSTRACT

This paper presents the design of two controllers that manage simultaneously to balance the system called inverted pendulum on wheels, the H_2 controller based on LMIs and the controller LQR+i. A control law designed in Matlab is programmed with the objective of achieving a response that stabilizes the pendulum in the vertical position. The presented results are achieved across the estimation of the signals in continuous and discrete time of the system and have an expected behavior in time.

To evaluate the performance of the controllers, continuous and discrete simulations in Simulink are made, later its performance is illustrated, where the comparison and analysis of their behavior is made.

Keywords: LQR+i Controller, Controller H_2 LMI.

1. INTRODUCCIÓN

Los péndulos invertidos constituyen una plataforma experimental interesante para la ingeniería de control. Uno de los más estudiados de estos sistemas es el denominado péndulo invertido sobre ruedas. El péndulo invertido es un sistema inestable, ya que puede caer en cualquier momento a menos de que se aplique una fuerza de control estabilizadora adecuada.

Uno de los mayores retos en control ha sido el análisis y diseño de sistemas de control multivariable (MIMO). Éste es un problema difícil debido a que la función de transferencia de un sistema MIMO es una matriz de funciones de transferencia. [1]

En las décadas de 1960 y 1970 se dieron una gran cantidad de aplicaciones de las técnicas de control moderno, en especial el control óptimo, la cual dio origen a técnicas de diseño sistemáticas como LQR (Linear quadratic regulator) y LQG (Linear quadratic Gaussian), conocidas como las técnicas posmodernas. A principios de la década de 1980, emergió una nueva técnica conocida como Teoría de Control H^∞ , la cual combina ambos enfoques, en el dominio del tiempo y en el de la frecuencia con el fin de proveer una solución unificada. [1]

La presentación de la Teoría del Control H^∞ en este artículo se hará para la norma cuadrática H_2 para el caso directo, mediante el análisis, resolución e implementación de las desigualdades matriciales lineales (LMI) en sistemas de control. [2]

Con el objetivo de obtener la misma respuesta tanto del sistema continuo como del sistema discreto [3] este proyecto pretende aplicar esta técnica de diseño, para la obtención de controladores eficaces. Para ello se aprovecha la

ayuda de herramientas computacionales de diseño de controladores como MATLAB, para facilitar su desarrollo y resolución de una manera más óptima y fiable. Además se utiliza la aproximación de [9] que permite realizar el diseño del sistema de control.

2. DISEÑO DEL CONTROLADOR LQR+i

Se realiza el diseño de un controlador LQR+i (Regulador Lineal Cuadrático mas integrador), para el control del ángulo de inclinación p y la posición θ .

El controlador LQR+i es un control por realimentación del vector de estados de la forma: [4, p847].

$$\begin{aligned} u &= -Kx + K_I \xi \\ \dot{\xi} &= r - y = r - Cx \end{aligned} \quad (1)$$

El sistema de control se define mediante la ecuación (2).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (2)$$

En donde

- x = vector de estado para la planta (vector de dimensión n)
- u = señal de control (escalar)
- y = señal de salida (escalar)
- ξ = salida del integrador (variable de estado del sistema escalar)
- r = señal de entrada de referencia
- A = matriz de coeficientes constantes de $n \times n$
- B = matriz de coeficientes constantes de $n \times 1$
- C = matriz de coeficientes constantes de $1 \times n$

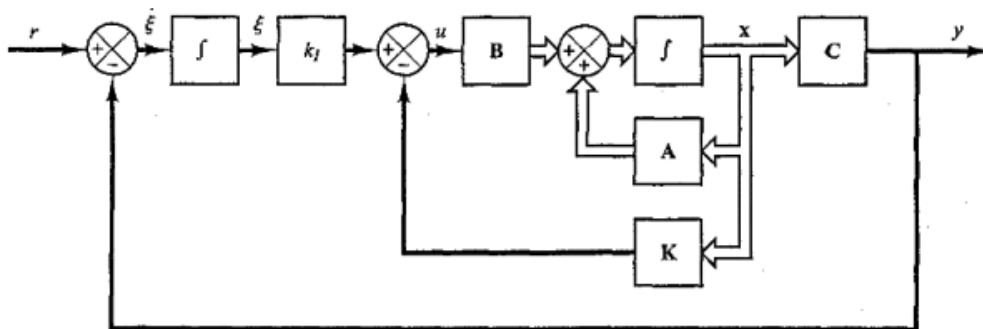


Fig.1. Sistema de Control LQR+i.

La descripción del sistema, es como se muestra en la ecuación (3)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (3)$$

Donde ξ es el estado que integra el error del controlador.

$$e = \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\dot{e} = Ae + Bu \quad (5)$$

La nueva ley es como se muestra en la ecuación (6)

$$u = -\hat{K}e \quad (6)$$

Donde

$$\hat{K} = [K | -K_I]$$

Ahora se resuelve el problema de estabilización. Sustituyendo la ecuación (6) dentro de la ecuación (2) se obtiene la ecuación (7)

$$\dot{e} = (A - B\hat{K})e \quad (7)$$

El criterio cuadrático a ser minimizado es el mostrado en la ecuación (8). [5, p5]

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q_x x + u^T R u) dt \quad (8)$$

Las matrices Q y R constituyen respectivamente el error del estado y el esfuerzo de control.

La ganancia K (matriz) se determina por la primera solución de la ecuación algebraica de Riccati mostrada en la ecuación (9). [6, p10]

$$A^T P + PA - PBQ_u^{-1} B^T P + Q_x = 0 \quad (9)$$

En donde P es una matriz definida positiva. Entonces \hat{K} se calcula como se muestra en la ecuación (10)

$$\hat{K} = Q_u^{-1} B^T \quad (10)$$

El siguiente paso es elegir las matrices de ganancia Q y R. Una forma es hacer la diagonal de la matriz

Q con solos escalares y cero todas las demás entradas. Luego, cada estado y entrada se pueden ponderar para hacer su contribución a la función de coste.

Usando MATLAB, la ecuación algebraica de Riccati es resuelta y la ganancia de control K es evaluada para diferentes valores de coeficientes de las matrices Q y R. La respuesta del sistema es simulada como la matriz Q, que se asume de la siguiente forma. Ver ecuación (11)

$$Q = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 500 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Donde los valores de a, b, c, d, e son los coeficientes correspondientes a los respectivos estados $\theta, \rho, \dot{\theta}, \dot{\rho}, i$ y al mismo tiempo la matriz de ponderación R es un valor escalar con sólo una entrada de control para el sistema.

Resultados

Las matrices de la Planta son las mostradas en la ecuación (12)

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 17.8139 & -0.0416 & 0.0416 \\ 0 & 28.7471 & 0.0120 & -0.0120 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3.3061 & 3.3061 \\ -0.9550 & -0.9550 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.0496 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1.6068 & 1.6068 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Se usa el comando de MATLAB lqr y valiéndose de las matrices de la ecuación (12) se obtienen los valores de K y Ki, en continuo y discreto.

$$K = \begin{bmatrix} -0.4839 & -48.4890 & -0.5320 & -8.7675 \end{bmatrix}$$

$$K_i = 0 \quad (13)$$

Para evaluar el funcionamiento del controlador en Simulink se realizan las simulaciones en continuo y discreto, su respuesta se muestra en las Figuras 2, 3 y 4.

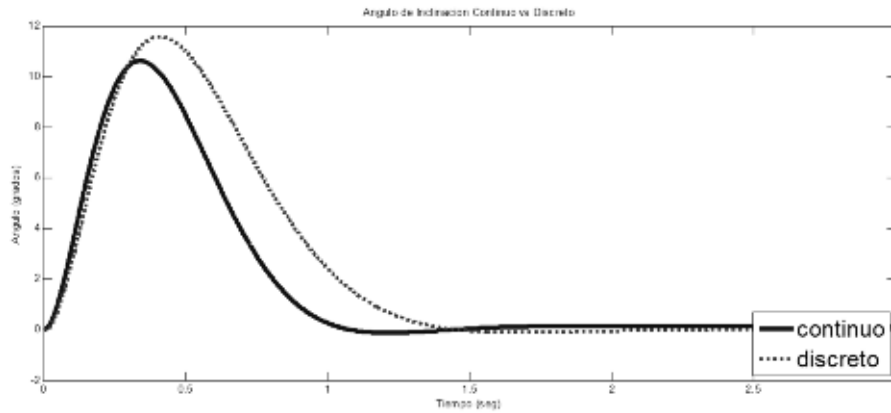


Fig. 2. Respuesta del controlador LQR+i para el ángulo de inclinación.

La Figura 2 muestra la señal de control para un ángulo de Inclinación de 12 grados, se realiza comparando la respuesta obtenida por la simulación realizada en continuo y discreto. El comportamiento esperado sería que su respuesta

tienda a establecer el sistema en el mismo tiempo, sin embargo el controlador en discreto, reacciona más rápido. Se selecciona el tiempo de muestreo de 5 mseg.

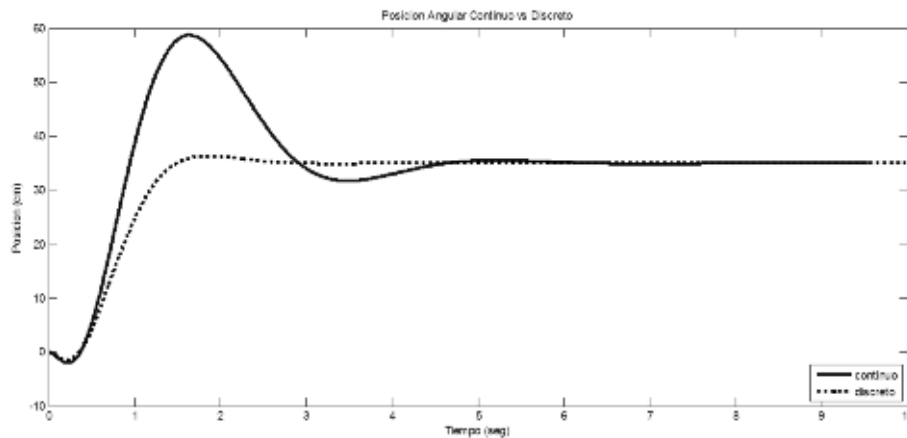


Fig. 3. Respuesta del controlador LQR+i para la posición.

La Figura 3 muestra la señal de control para una posición de 35 cm, se realiza comparando la respuesta obtenida por la simulación realizada en continuo y discreto. El comportamiento esperado

sería que su respuesta tienda a establecer el sistema en el mismo tiempo, sin embargo el controlador en discreto, reacciona más rápido.

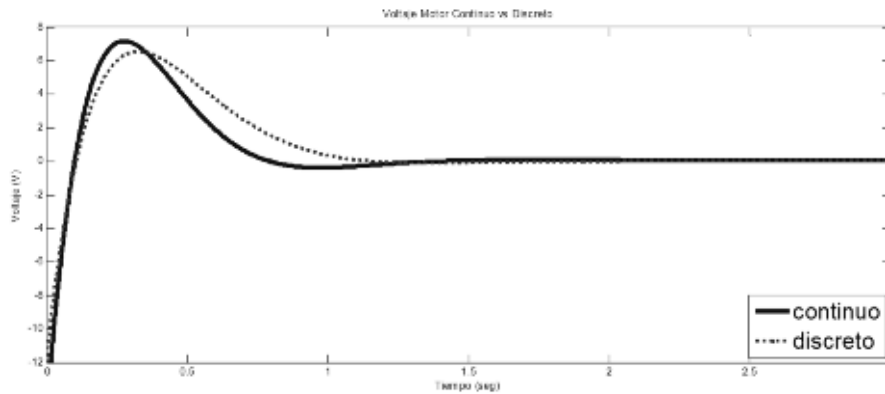


Fig. 4. Respuesta del voltaje de un motor al controlador LQR+i para el ángulo de inclinación.

La Figura 4 muestra la respuesta del voltaje de un motor al controlador LQR+i para un ángulo de Inclinación de 12 grados, al igual que las simulaciones anteriores se compara la respuesta obtenida en continuo y discreto.

3. DISEÑO DEL CONTROLADOR H_2

Se presenta el diseño de un controlador robusto H_2 , el cual se implementa en la planta prototipo para el control del ángulo de giro ϕ . El controlador diseñado se basa en LMIs (desigualdades matriciales lineales).

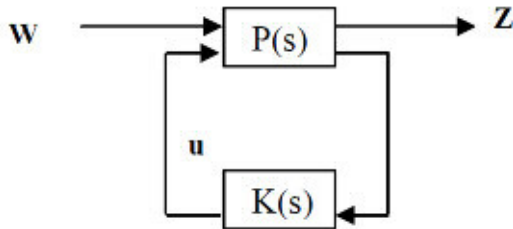


Fig. 5. Esquema de dos puertos

Partiendo del esquema de dos puertos mostrado en la Figura 5 se tiene en cuenta el modelo dado en la ecuación (12), el cual corresponde al modelo de la planta $P(s)$ las ecuaciones en espacio de estados tienen las matrices A_2 y B_2 para el desarrollo del controlador.

La representación mediante la función de transferencia del sistema es ahora de la forma mostrada en la ecuación (14)

$$z = P_{zw}w + P_{zu}u \quad (14)$$

$$\begin{aligned} y &= P_{yw}w + P_{yu}u \\ u &= Ky \end{aligned}$$

El sistema de control se define mediante la ecuación (15). [2, p41]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bw + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (15)$$

Considerando la señal de control como se muestra en la ecuación (16)

$$u = -Kx \quad (16)$$

Sustituyendo la ecuación (16) en la ecuación (15) se obtiene la ecuación (17)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A - BK)x + Bw \\ y &= (C - DK)x \end{aligned} \quad (17)$$

Dónde: K es la matriz que controlará la planta, (A , B y C) son las matrices de la planta, x son los estados, w son las perturbaciones.

Se establece el problema en términos de desigualdades matriciales, sustituyendo la ecuación (17) en la ecuación algebraica de Riccati mostrada en la ecuación (9), se obtiene la ecuación (18). [7, p255], [8, p202]

$$\begin{aligned} (A - BK)P + P(A - BK)^T + BB^T &< 0 \\ P &> 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Introduciendo el cambio de variable $KP=Y$ se llega a la ecuación (19), que es una LMI en variables P y Y . [8, p204]

$$AP + PA^T - BY - Y^T B^T + BB^T < 0 \quad (19)$$

$$P > 0$$

La solución al problema LMI contiene ecuaciones de Riccati difíciles de resolver, se usan los comandos de MATLAB para resolver LMIs y valiéndose de las matrices de las ecuación (12) se obtienen los valores de K.

$$K = \begin{bmatrix} -0.6976 & -1.2052 \\ 0.6976 & 1.2052 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$K = \begin{bmatrix} -0.6976 & -1.2052 \\ 0.6976 & 1.2052 \end{bmatrix}$$

Como se menciona anteriormente, el desarrollo y prueba de los controladores es en simultáneo, de modo que para evaluar el funcionamiento del controlador en Simulink es necesario implementar el controlador H_2 en discreto. A diferencia del controlador LQR+i, en el que tan solo se discretizan las matrices en el archivo .m; para el caso del controlador H_2 , se hace un procedimiento llamado rediseño digital.

Diseño del Controlador LMI Discreto

Se emplean las mismas matrices A_2 y B_2 descritas en la parte continua, y se emplea la transformación bilineal (método de Tustin) para discretizar el sistema lineal.

El modelo discreto del sistema en lazo cerrado en $(K+1)T$ esta dado por la ecuación (21). [9, p2]

$$X_d(\overline{K+1}T) = (G - HK_d)X_d(KT) + HE_d R \quad (21)$$

$$Y_d(KT) = CX_d(KT)$$

Donde:

$$G = (I - \frac{T}{2}A)^{-1}(I - \frac{T}{2}A)$$

$$H = \frac{T}{2}(I - \frac{T}{2}A)^{-1}B_2$$

Y la señal de control está dada por la ecuación (22)

$$u_d(KT) = -K_d X_d(KT) + E_d R \quad (22)$$

El método de diseño para determinar la matriz de ganancias K_d es acorde al siguiente teorema [7, p3]. Si existe una matriz simétrica definida positiva G , una matriz F , y un escalar $a > 0$, tal que el siguiente problema generalizado de valores propios (GEVP) (Boyd, 1994) se puede solucionar, entonces la ley de control digital (21) con $E_d=0$ satisface el objetivo formulado de estabilizar el

sistema si la siguiente LMI es factible. Ver ecuación (23).

$$\min_{\Gamma, F} \alpha \text{ s. t.}$$

$$\begin{bmatrix} -\alpha\Gamma & * \\ G_c\Gamma - G\Gamma + HF & -\alpha I \end{bmatrix} < 0 \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} -\Gamma & * \\ G\Gamma + HF & -I \end{bmatrix} < 0$$

Donde $F = K_d G$ y $*$ denota el elemento transpuesto en la posición simétrica, la matriz de ganancia de realimentación K_d esta dada por la ecuación (24)

$$K_d = F\Gamma^{-1} \quad (24)$$

Para la transformación bilineal, la matriz E_d puede obtenerse igualando la respuesta (salida) en estado estable del sistema continuo, con la respuesta del sistema discreto, obteniendo

$$E_d = [C_c(I - (G - HK_d))^{-1}H + D_c]^+ [C_c(I - G_c)^{-1}H_c + D_c]E_c \quad (25)$$

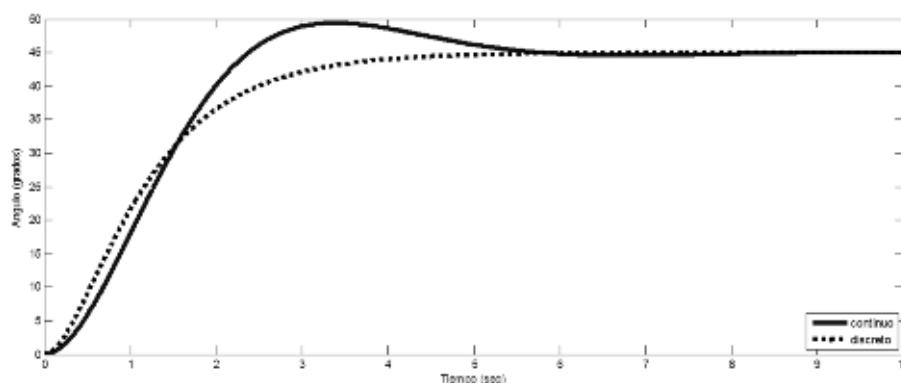
Donde E_c es la ganancia de feedforward continua, y $+$ denota la pseudo-inversa de Moore – Penrose.

A partir de las matrices de las ecuación (12) y (23) usando los comandos de MATLAB para resolver LMIs y se obtienen los valores de K_d

$$K_d = \begin{bmatrix} -1.5621 & -2.1562 \\ 1.5621 & 2.1562 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Para corroborar el funcionamiento del controlador en Simulink se realizan las simulaciones en continuo y discreto, su respuesta se muestra en las Figura 6.

La Figura 6 ilustra el desempeño del controlador robusto H_2 , donde se realiza la comparación de su comportamiento en continuo y discreto. Se puede demostrar que el sistema de control elegido es capaz de rechazar una perturbación. Como se observa la señal de control para un ángulo de giro de 45 grados, es el comportamiento esperado en el que su respuesta tiende a establecer el sistema en el mismo tiempo.

Fig. 6. Respuesta del controlador H_2 para el control de motores.

4. CONCLUSION

El diseño e implementación de dos controladores en simultáneo logran mantener en equilibrio el sistema, el controlador óptimo LQR+i envía una señal de control a dos objetivos posición y ángulo de inclinación y el controlador robusto H_2 basado en LMIs controla el ángulo de giro. Estos son programados en Matlab/Simulink.

Se intervienen las tres variables del sistema con un tiempo de muestreo de cinco milisegundos obteniendo una respuesta similar tanto en tiempo continuo como en tiempo discreto, de esta forma el péndulo invertido sobre ruedas es capaz de mantenerse estable.

El control robusto implementado, es efectivo en su comportamiento para el manejo del ángulo de giro, este tiene una base teórica sólida que se caracteriza por considerar incertidumbres en el modelo que sean tolerables por el controlador. Logrando así la estabilidad y robustez del sistema. El controlador LQR+i es una solución sencilla cuando se trata de control de movimiento, este termina siendo un control más bien empírico, dado por ajustes de parámetros según las pruebas realizadas.

5. AGRADECIMIENTOS

Los autores hacen un reconocimiento al ingeniero Oscar Ivan Higuera profesor de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia por ser guía en el enfoque del presente artículo.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Francisco J Rodríguez R, "H ∞ ¿Que es y para qué sirve?". Universidad Nacional autónoma de México, México, 4 de Mayo de 2010.
- [2] Alexis David Miranda Mina, "Diseño e Implementación de un Controlador con realimentación estática de estados usando desigualdades matriciales para el levitador magnético mls". Escuela Politécnica del Ejército. Sangolquí, Ecuador 2010.
- [3] Oscar Ivan Higuera Martínez. PhD. Juan Mauricio Salamanca. "Diseño de un controlador continuo y discreto basado en lmi" Colombia, 2011.
- [4] Katsuhiko Ogata, "Modern Control Engineering", University of Minnesota.4 ed. México: Pearson Education International, 1996.
- [5] A. Viguria, R. Cano, M. Fiacchini, A. Prieto, B. J. Vela, F. R. Rubio, J. Aracil y C. Canudas-de-Wit. "PPCar (Personal Pendulum Car): Vehículo basado en péndulo invertido". Escuela Superior de Ingenieros de Sevilla.
- [6] Björn Carlsson Per Örbäck, "Mobile Inverted Pendulum". CHALMERS UNIVERSITY OF TECHNOLOGY Gothenburg, Sweden, 2009.
- [7] Francisco Rodriguez Rubio, Manuel Jesus Lopez Sanchez, "Control Adaptativo y Robusto". Universidad de Sevilla, 1996.
- [8] Geir E. Dullerud, Fernando G. Paganini. "A course in Robust Control Theory". University of Illinois.
- [9] Królikowski A, Horla D, "Application of LMI for Design of Digital Control Systems". Bulletin Of The Polish Academy Of Sciences, Technical Sciences Vol. 56, No. 4, 2008.